

**Carrera de Tecnólogo en Informática**  
**Matemática Discreta y Lógica 1**  
**Examen**  
**21/02/11**

**Instrucciones**

- Se leerá la letra y tendrá dos horas para realizar el examen a partir de ese momento.
- El examen es una prueba de carácter individual y no se puede consultar material.
- Lea atentamente la letra antes de contestar cada ejercicio.
- El examen suma 100 puntos.
- Para aprobar son necesarios 60 puntos.

**Ejercicio 0** **1 punto**

Numere las hojas que entregue, incluya nombre y número de cédula en cada hoja y registre en la primer hoja el total de hojas entregadas.

**Ejercicio 1** **7 puntos**

Denotamos por  $Z$  el conjunto de los enteros. Se denota por  $P(Z)$  el conjunto potencia de  $Z$ . Indique dos elementos finitos en  $P(Z)$  por extensión. Indique un elemento infinito en  $P(Z)$  por comprensión.

**Ejercicio 2** **9 puntos**

Indique conjuntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tales que se cumplan las siguientes igualdades:

1.  $A \cap B = \{2, 4, 5\}$
2.  $A \cap C = \{1, 3\}$
3.  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
4.  $C - A = \{6, 8\}$

**Ejercicio 3** **12 puntos**

Considere la relación  $R$  en los reales definida por  $xRy$  si  $x-y \in \mathbb{Z}$ . Demuestre  $R$  es una relación de equivalencia.

**Ejercicio 4** **12 puntos**

Sea  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+$  ( $\mathbb{N}^+$  son los naturales sin el 0) definida por la ecuación  $f(x) = x + 1$ . Defina  $g : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $f$  y  $g$  sean inversas. Demuestre  $f$  y  $g$  son inversas.

**Ejercicio 5** **12 puntos**

Sea  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $R \subseteq A \times A$ , definida por:

$$R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)\}$$

Demuestre  $R$  es un orden parcial. Es  $R$  un orden total?. Indique si tiene maximo, minimo, elemento maximal y minimal y cuales son. Indique si es un retículo.

**Ejercicio 6** **10 puntos**

Considere la relación de recurrencia siguiente:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= 1 \\ a_n &= 3a_{n-1} + 4a_{n-2} \text{ para } n \geq 2 \end{aligned}$$

resuelva la recurrencia, indique solución general y particular.

**Ejercicio 7** **10 puntos**

Demuestre las siguientes consecuencias lógicas utilizando la definición de valuación:

- $\neg\varphi \wedge \neg\psi \models \neg(\psi \vee \varphi)$
- $\neg\varphi \vee \neg\psi \models \neg(\varphi \wedge \psi)$

**Ejercicio 8** **15 puntos**

1. Defina las reglas de introducción y eliminación del conectivo "  $\vee$  ".
2. Demuestre el siguiente teorema:

$$(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$$

**Ejercicio 9**

**12 puntos**

Sea  $X = \{1, 2, 3\}$ .

1. Defina el conjunto  $L \subseteq X^*$  de los capicuas de largo impar.
2. Defina la función primitiva recursiva  $largo : L \rightarrow N$ .
3. Defina el principio de inducción primitiva sobre  $L$ .
4. Demuestre utilizando el principio anterior que  $largo(x)$  es impar para todo  $x \in L$ .