Examen de MDL1 - Diciembre 2012

Prof. P. Peratto, S. Sensale

Ejercicio 1

[a] $\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - 1 \\ a_1 = 3 \end{cases}$

[b] $a_{n_H} = k.2^n$

$a_{n_p} = \alpha$

$\alpha = 2\alpha - 1 \Rightarrow \alpha = 1$

$\Rightarrow a_n = k.2^n + 1$, y como $a_1 = 3 \Rightarrow k = 1$ $\boxed{a_n = 2^n + 1}$

Ejercicio 2

[a] (i) $3 \in A$

(ii) si $n \in A$, entonces $2n - 1 \in A$

[b] • Sea A el conjunto definido en [a] y P una propiedad tal que (i) 3 la cumple

(ii) si n la cumple, entonces $2n-1$ la cumple

Entonces P se cumple $\forall n \in A$

• Verifiquemos que la propiedad 'es impar' vale $\forall n \in A$ con el P.I.P.:

(i) 3 es impar ✓

(ii) (H) n es impar (T) $2n-1$ es impar

dem:

como n es un natural, $2n$ es par $\Rightarrow \underbrace{2n}_{par} \underbrace{-1}_{impar}$ es impar □

Así, por el P.I.P., todo $n \in A$ es impar

[c] Es la función inversa de $g(n) = 2n - 1 \Rightarrow f(n) = \frac{n+1}{2}$. También puede definirse por recurrencia:

Por recurrencia: • $f(3) = 2$

• $f(2n-1) = n \quad \forall n \in A$

Examen de MDL1 - Diciembre 2012

Prof. P. Perotto, S. Sensale

Ejercicio 2

[d] No es ni de equivalencia ni de orden, pues $(2,2) \notin R$, al ser $f(2) = \frac{2+1}{2} = 3/2 \neq 1$

[e]* Si f fuera biyectiva, su inversa también lo sería. Ahora, su inversa es $g(x) = 2x - 1$, y $\nexists\, n \in \mathbb{N}$ tal que

$g(x)$ es par $\Rightarrow$ g no es sobreyectiva, ni biyectiva, ni tampoco lo es f

* Análogamente, como $\nexists\, n \in A \,/\, g(n) = 3$, f no es biyectiva

Ejercicio 3

[a] (i) $a \in L$

(ii) si $\alpha \in L$ entonces $\alpha b \in L$

[b] • Sea L el conjunto definido en [a] y P una propiedad tal que (i) a la cumple

(ii) si α la cumple entonces αb la cumple

Entonces P se cumple para todo elemento de L

• (i) 'a' tiene una única letra "a" ✓

(ii) H) α tiene una única letra "a" T) αb tiene una única letra "a"

dem:

como a α solamente le agrego una letra "b", la cantidad de letras "a" sigue siendo una $\square$

[c] (i) $\overset{i}{\to} a \overset{ii}{\to} ab \overset{ii}{\to} abb \overset{ii}{\to} abbb \overset{ii}{\to} abbbb \overset{ii}{\to} abbbbb \in L$

(ii) y (iii) $\notin L$, pues no cumplen que tiene una única letra "a"

[d] • $f(a) = 0$

• $f(\alpha b) = 1 + f(\alpha) \quad \forall \alpha \in L$

Examen de MDL1 - Diciembre 2012

Prof. P. Perotto, S. Sensale

Ejercicio 4

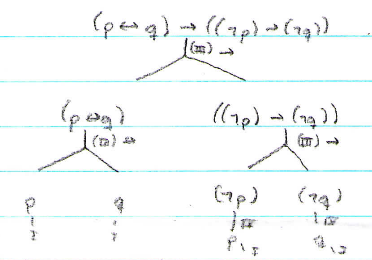
[a] (I) $p_i \in PROP \ \forall i \geq 1$

(II) $\bot \in PROP$

(III) si $\alpha, \beta \in PROP$, entonces $(\alpha \square \beta) \in PROP \ \forall \square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(IV) si $\alpha \in PROP$, entonces $(\neg\alpha) \in PROP$

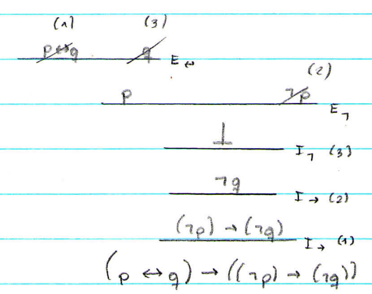
[b]



[c]

p	q	$(\neg p)$	$(\neg q)$	$(p \leftrightarrow q)$	$((\neg p) \rightarrow (\neg q))$	$(p \leftrightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow (\neg q))$	
0	0	1	1	1	1	1	
0	1	1	0	0	0	1	
1	0	0	1	0	1	1	es tautología
1	1	0	0	1	1	1	

[d]



(1) $p \leftrightarrow q$

(2) $\neg p$

(3) q