

Examen de Diciembre 2012

El examen dura tres horas. Es sin material e individual. Fundamente cada respuesta y sea prolijo. Éxitos!

Ejercicio 1 **(15 puntos)**

Considere la siguiente secuencia de números: $a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 9, a_4 = 17, a_5 = 33, a_6 = 65, \dots$

- a) Defina la secuencia como una ecuación en recurrencia, especificando las condiciones iniciales.
- b) En general, ¿cuánto vale a_n ?

Ejercicio 2 **(35 puntos)**

- a) Defina de forma inductiva el conjunto $A = \{3, 5, 9, 17, 33, 65, \dots\}$.
- b) Enuncie el P.I.P. para A y demuestre que todo elemento de A es impar.
- c) Defina una función que dado un elemento de A devuelva su antecesor (por ejemplo, $f(17) = 9$).¹ ¿Está bien definida?
- d) Si se extiende la función anterior a todo \mathbb{N} y se define la relación en \mathbb{N} $aRb \Leftrightarrow f(a) = b$,
 - ¿es una relación de equivalencia? En caso afirmativo defina el conjunto cociente,
 - ¿es una relación de orden? En caso afirmativo realice su diagrama de Hasse en $\{1, 2, \dots, 17\}$.
- e) ¿Es $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva? ¿y $f: A \rightarrow A$? Justifique.

Ejercicio 3 **(25 puntos)**

Considere el lenguaje $L = \{a, ab, abb, abbb, abbbb, abbbbb, \dots\}$.

- a) Defina el conjunto L como un conjunto inductivo.
- b) Enuncie el P.I.P. para L y demuestre que todo elemento de L tiene una única letra a
- c) ¿Cuáles de los siguientes elementos pertenecen a L ? Justifique.
 - i. abbbbb,
 - ii. abbbba
 - iii. c
- d) Defina una función que cuente la cantidad de letras "b" de un elemento de L .
¿Está bien definida?

Ejercicio 4 **(25 puntos)**

- a) Defina el conjunto PROP.
- b) Demuestre (dando el árbol de precedencia o la secuencia de formación) que la proposición $\varphi = (p \leftrightarrow q) \rightarrow ((\neg p) \rightarrow (\neg q))$ pertenece a PROP.
- c) ¿Es φ tautología? Justifique usando tablas de verdad.
- d) ¿Es φ teorema? Justifique usando derivaciones.

¹ Considere $f(3) = 2$