Práctico 1 – Relaciones

Definiciones

- Diremos que una relación R binaria en A es asimétrica sii $\forall a,b \in A, (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \notin R$.
- Diremos que una relación R binaria en A es irreflexiva sii $\forall a \in A, (a,a) \notin R$.
- Diremos que $R^{-1} = \{(a,b) \mid (b,a) \in R\}$ es la relación inversa de R, y que $\overline{R} = \{(a,b) \mid (a,b) \notin R\}$ es la relación complementaria de R.

Ejercicio 1

¿Puede una relación asimétrica ser reflexiva? Justifique
Pruebe que si R es simétrica $R^{-1} = R$ y de un contraejemplo que demuestre que $\overline{R}$ no es asimétrica.
Pruebe que si R es reflexiva R^{-1} es reflexiva y $\overline{R}$ es irreflexiva.

Ejercicio 2

Para cada una de las siguientes relaciones binarias en $A = \{1,2,3,4\}$, indique si son reflexivas, irreflexivas, simétricas, asimétricas, antisimétricas y transitivas:

a) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)\}$
b) $R = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$
c) $R = \{(1,3),(1,1),(3,1),(1,2),(3,3),(4,4)\}$
d) $R = \emptyset$
e) $R = A \times A$

Ejercicio 3

Halle el número de relaciones R en el conjunto $A = \{a,b,c,d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: R es simétrica, $(a,b) \in R$ y $(c,c) \in R$. Construya la matriz y el digrafo de una de estas relaciones.

Ejercicio 4

Elabore criterios para decidir si una relación es reflexiva o simétrica, basándose en la matriz de la relación.

Ejercicio 5

Sea R una relación de equivalencia sobre $A = \{1,2,3\}$. Sabiendo que el conjunto cociente A/R tiene un único elemento, defina R por extensión, represente la matriz de la relación y dibuje su digrafo. Repita lo realizado sabiendo que A/R tiene tres elementos. ¿Cuántas relaciones posibles hay si A/R tiene dos elementos? Encuéntrelas.

Ejercicio 6

Sea n un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en Z, llamada congruencia módulo n, en la forma:

$$a \equiv b \leftrightarrow a - b \text{ es divisible por } n$$

Pruebe que $\equiv$ es una relación de equivalencia.