Práctico 2 – Relaciones y funciones

Definiciones

- Sean $E=(e_{ij})_{m\times n}$ y $F=(f_{ij})_{m\times n}$ dos matrices cero-uno de dimensión $m\times n$.
  Diremos que $E\leq F$ si $e_{ij}\leq f_{ij}\ \ \forall i,j/1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n$

- Para $n\in Z^{+}$, llamaremos matriz identidad a la matriz cero-uno $I_n=(\delta_{ij})_{n\times n}$ tal que:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

- Sea $A=(a_{ij})_{m\times n}$.
  Llamaremos traspuesta de A a la matriz $A^{T}=(b_{ij})_{n\times m}$ tal que
  $b_{ji}=a_{ij}\ \ \forall i,j/1\leq j\leq n, 1\leq i\leq m$

Ejercicio 1

Dado un conjunto A con $|A|=n$ y una relación R sobre A, sea M la matriz de la relación R.
Demostrar que:

a) R es reflexiva si y sólo si $I_n\leq M$
b) R es simétrica si y sólo si $M=M^{T}$
c) R es transitiva si y sólo si $M^{2}\leq M$

Ejercicio 2

Una empresa de outsourcing tiene tres empleados (Alberto, Bernardo y Carlos) y un solo cliente que es atendido los lunes por Carlos, los martes por Alberto, los miércoles por Carlos, los jueves por Alberto y los viernes por Bernardo. La empresa quiere aprovechar los días "libres" de sus empleados para enfrentar un proyecto de desarrollo de un sistema interno de administración que conceptualmente tendrá un módulo de personas, un módulo de tareas y un módulo de soluciones. Dada la complejidad del proyecto la empresa pretende que Alberto conozca los módulos de personas y tareas, Bernardo los de personas y soluciones, y Carlos los de tareas y soluciones. ¿Tendrá la empresa todos los días empleados que abarquen el conocimiento de todos los módulos?

Ejercicio 3

Sea la relación $R=\left\{(x,y)\mid \frac{y}{x}\in Z\right\}$ definida sobre un conjunto $A\subseteq Z$.

Demuestre que R es un orden parcial sobre A.

Dibuje los diagramas de Hasse para R, determine si R es un orden total, encuentre los elementos maximales y minimales de A, determine si A tiene máximo y/o mínimo, y diga si (A,R) es un retículo para:

a) $A=\{2,4,6,12\}$
b) $A=\{4,6,12\}$
c) $A=\{2,4,6\}$
d) $A=\{1,2,4,5,6,7,12,420\}$

Ejercicio 4

Sea A un conjunto finito tal que $|A| = n$.

¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow P(A)$ satisfacen que $\forall x \in A, f(x) \neq \{x\}$?

Ejercicio 5

Dados $A = \{1,2,...,m\}$ y $B = \{1,2,...,n\}$, calcule la cantidad de funciones $f : A \rightarrow B$ que satisfacen:

a) f es inyectiva
b) f es biyectiva

Ejercicio 6

Determinar si las siguientes funciones son inyectivas y/o sobreyectivas:

c) $f : Z \rightarrow Z / f(x) = x - 1$
d) $f : N \times N \rightarrow N / f((x, y)) = x$
e) $f : N \times N \rightarrow N / f((x, y)) = x + y$
f) $f : N \times N \rightarrow Z / f((x, y)) = x - y$
g) $f : N \times N \rightarrow N / f((x, y)) = x.y$
h) $f : N \times N \rightarrow N / f((x, y)) = x^y$
i) $f : Z \times Z^* \rightarrow Q / f((x, y)) = x/y$

Ejercicio 7

Demostrar que la función $f : N \rightarrow \{2.n / n \in N\} / f(x) = 2.x$ es biyectiva.

Intuitivamente: ¿qué se puede decir de la "cantidad de elementos" de los conjuntos de dominio y codominio?