

Práctico 4

Relaciones de recurrencia y ecuaciones en diferencias

Ejercicio 1

Determine a_{12} dada la siguiente relación de recurrencia (sugerencia: llame b_n a cada a_n^2).

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_n^2 = 5 \cdot a_{n-1}^2 & n \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 2

Demuestre por inducción completa que la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = a_{n-1} + (n-1) & n \geq 2 \end{cases}$$

define una sucesión que cumple $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n = \sum_{i=1}^n (i-1)$

Ejercicio 3

El número de bacterias en un cultivo es de 1000 y este número aumenta un 25% cada dos horas. Use una relación de recurrencia para determinar el número de bacterias presentes después de un día.

Ejercicio 4

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones en diferencias:

- a) $a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = 0, \quad n \geq 0$
- b) $4a_n - 5a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$

Ejercicio 5

Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones en diferencias, y la solución particular sabiendo que $a_0 = 1$:

- a) $3a_{n+1} - 4a_n = 0, \quad n \geq 0$
- b) $2a_n - 3a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1$

Ejercicio 6

Encuentre la solución general de la ecuación en diferencias $a_n = 9a_{n-1} - 20a_{n-2}$ con $n \geq 2$ y halle la solución particular sabiendo que $a_0 = 5$ y $a_1 = 23$.

Ejercicio 7

Ídem anterior para $a_n + a_{n-1} - 6a_{n-2} = 0$ con $n \geq 2$, $a_0 = 1$ y $a_1 = 2$.

Ejercicio 8

Considere la relación de Fibonacci: $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ con $n \geq 0$, $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. Escriba esta relación como una ecuación en diferencias y resuélvala (halle la solución particular).

Ejercicio 9

Encuentre la solución general de la ecuación $a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2} = 0$ con $n \geq 2$, y la solución particular sabiendo que $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

Ejercicio 10

Encuentre la solución general de la ecuación $a_n + a_{n-2} = 0$ con $n \geq 2$, y la solución particular sabiendo que $a_0 = 1$ y $a_1 = i$. (Sugerencia: para este ejercicio no escriba los complejos en notación polar). ¿Cuánto es a_{997} ?

Solución:

Comenzamos resolviendo la ecuación característica $r^2 + 1 = 0$, que tiene raíces complejas i y $-i$. Por lo tanto la solución general de la ecuación en diferencias será $a_n = p \cdot i^n + q \cdot (-i)^n$.

Como sabemos que $a_0 = 1$, entonces $p + q = 1$.

Como $a_1 = i$, entonces $p \cdot i + q \cdot (-i) = i$, o dividiendo entre i : $p - q = 1$.

Ahora podemos resolver el sistema que nos permite determinar los parámetros para hallar la solución particular:

$$\begin{cases} p + q = 1 \\ p - q = 1 \end{cases}$$

$$2p = 2$$

$$p = 1 \wedge q = 0$$

La solución particular es entonces $a_n = i^n$, y como 997 es de la forma $4k + 1$ tenemos que $a_{997} = i$

