Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica - Práctico 1

(Inducción)

Ejercicio 1

a) Considere el conjunto *R* de los números reales. Dé ejemplos de conjuntos $A \subseteq R$ que satisfagan los siguientes conjuntos de cláusulas:

- i. $0 \in A$
  ii. Si $n \in A$ entonces $(n+1) \in A$
- i. $2 \in A$
  ii. Si $n \in A$ entonces $(n+2) \in A$
- i. $3 \in A$
  ii. Si $n \in A$ entonces $(n+1) \in A$
  iii. Si $n \in A$ entonces $(n-1) \in A$
- i. Si $(n+1) \in A$ entonces $n \in A$.

b) Para cada conjunto de cláusulas, indique cuál es el mínimo subconjunto de *R* que satisface las cláusulas.

c) Para cada uno de los conjuntos mínimos, dé 3 elementos que pertenezcan al conjunto y justifique su pertenencia en términos de la aplicación de las cláusulas.

Ejercicio 2

Defina inductivamente los siguientes conjuntos:

- El conjunto de los naturales múltiplos de 3 (o sea {0,3,6,9,…}).
- El conjunto de los enteros múltiplos de 3.
- El conjunto de los naturales que sean potencias de 2 (o sea {1,2,4,8,16, …}).

Ejercicio 3

Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$, defina inductivamente el conjunto Σ^*.

Ejercicio 4

Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$. Sea $\Delta \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por las cláusulas:

i. $\varepsilon \in \Delta$

ii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha bc \in \Delta$

iii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha ba \in \Delta$

Dé 3 palabras de Σ^* que pertenezcan a Δ y 3 palabras que no pertenezcan.

Ejercicio 5

Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$. Sea $\Gamma \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por las cláusulas:

i. $\varepsilon \in \Gamma$

ii. $a \in \Gamma$

iii. Si $\alpha \in \Gamma$ y $\beta \in \Gamma$ entonces $b\alpha c\beta b \in \Gamma$.

a) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

$bcb \in \Gamma$ $\quad$ $bacab \in \Gamma$ $\quad$ $bccb \in \Gamma$ $\quad$ $bacbcbb \in \Gamma$

b) Enuncie el principio de inducción primitiva para Γ.

Ejercicio 6

Defina inductivamente los siguientes conjuntos:

- $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$
- $\{b\}^*$
- $\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots\}$
- $\{\alpha \in \{1,2,3\}^* \mid \alpha \text{ es capicúa}\}$

Ejercicio 7

Considere el conjunto N de los números naturales definido inductivamente por las siguientes cláusulas:

i. $0 \in N$

ii Si $n \in N$ entonces $(n+1) \in N$.

a) Enuncie y demuestre el principio de inducción primitiva para N.

b) Pruebe utilizando este principio que para todo $n \in N$ se cumple que n^2+n es par.

Ejercicio 8

Enuncie el principio de inducción primitiva para el conjunto **P** definido inductivamente por las siguientes cláusulas:

i. $0 \in \mathbf{P}$

ii. Si $n \in \mathbf{P}$ entonces $(n+2) \in \mathbf{P}$.

Pruebe utilizando este principio, que para todo $n \in \mathbf{P}$, existe $m \in N$ tal que $n = m+m$.

Ejercicio 9

Considere el conjunto **T** de los naturales potencia de 2 definido inductivamente por las siguientes cláusulas:

i. $1 \in$ **T**

ii. Si $n \in$ **T** entonces $(n*2) \in$ **T**

a) Enuncie y demuestre el principio de inducción primitiva para **T**.

b) Pruebe utilizando este principio, que para todo $n \in$ **T** si $n>1$ entonces n es par.

Ejercicio 10

Sea $\Sigma = \{a,b\}$ y considere $\Delta \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por las cláusulas:

i. $a \in \Delta$

ii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $b\alpha b \in \Delta$.

a) Enuncie y demuestre el principio de inducción primitiva para Δ.

b) Pruebe inductivamente que para todo $\alpha \in \Delta$, α tiene un número par de símbolos b.

Ejercicio 11

Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$. Sea $\Delta \subseteq \Sigma^*$ el conjunto definido en el ejercicio 4.

a) Enuncie el principio de inducción primitiva para Δ.

b) Sea long(α) la longitud de la palabra α. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? Justifique su respuesta en todos los casos.

- Si $\alpha \in \Delta$ entonces long(α) > 0.
- Si $\alpha \in \Delta$ entonces long(α) es par.
- Si $\alpha \in \Delta$ entonces long(α) es múltiplo de 3.
- Si $\alpha \in \Delta$ entonces α tiene el mismo número de "a" que de "c".
- Si $\alpha \in \Delta$ entonces α tiene al menos el doble de símbolos b que de símbolos a.

Ejercicio 12

Sea $\Sigma = \{a,b,c\}$. Sea $\Delta \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por las cláusulas:

i. $\varepsilon \in \Delta$

ii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha b \in \Delta$

iii. Si $\alpha \in \Delta$ entonces $\alpha a \in \Delta$

a) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? Justifique su respuesta en términos de la aplicación de las cláusulas.

$b \in \Delta$ $\quad a \in \Delta$ $\quad c \in \Delta$ $\quad babcbababcab \in \Delta$ $\quad aba \in \Delta$ $\quad babab \in \Delta$ $\quad aaaa \in \Delta$

b) Considere $\Gamma \subseteq \Sigma^*$ definido inductivamente por las cláusulas:

i. $\varepsilon \in \Gamma$

ii. Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $b\alpha \in \Gamma$

iii. Si $\alpha \in \Gamma$ entonces $a\alpha \in \Gamma$

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? Justifique su respuesta en términos de la aplicación de las cláusulas.

$b \in \Gamma$ $a \in \Gamma$ $c \in \Gamma$ $bab \in \Gamma$ $aba \in \Gamma$ $babab \in \Gamma$ $aaaa \in \Gamma$

c) ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

$\Delta \subseteq \Gamma$ $\Gamma \subseteq \Delta$ $\Delta = \Gamma$

Ejercicio 13

Considere la siguiente definición inductiva de la relación $S \subseteq N\text{x}N$:

i. Si $n \in N$ entonces $(n,n) \in S$

ii. Si $(n,m) \in S$ entonces $(n, m+1) \in S$.

a) Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y justifique su respuesta usando la definición de S.

$(0,0) \in S$ $0 \in S$ $(\pi,\pi) \in S$ $(2,3) \in S$ $(3,2) \in S$

b) Enuncie el principio de inducción primitiva para S.

c) Dé una definición por comprensión del conjunto S.

d) Considere la siguiente definición inductiva de la relación $Q \subseteq N\text{x}N$:

i. Si $n \in N$ entonces $(0,n) \in Q$

ii. Si $(n,m) \in Q$ entonces $(n+1, m+1) \in Q$.

¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? Justifique su respuesta.

$S \subset Q$ $Q \subset S$ $S \subseteq Q$ $Q \subseteq S$ $Q = S$