Conjuntos y relaciones

Introducción a la teoría de conjuntos

Definir un conjunto no es algo sencillo. Según el diccionario de la Real Academia Española la acepción matemática de conjunto es *"Totalidad de los entes matemáticos que tienen una propiedad común"*, y según el diccionario de Webster, la definición de set (conjunto, en inglés) se podría traducir como *"Una colección abstracta de números o símbolos"*.

Un conjunto debe ser una colección bien definida de objetos. Estos objetos se llaman elementos y se dice que son miembros del conjunto. Bien definido significa que para cualquier elemento que consideremos, podemos determinar si está o no en el conjunto observado.

Para comenzar, nos limitaremos a trabajar con conjuntos que no dependan de opiniones, como *"el conjunto de los 3 mejores lenguajes de programación"*. Más adelante veremos que la definición de conjunto debe restringirse aún más para evitar problemas.

Podemos definir un conjunto por extensión (explicitando todos sus elementos) o por comprensión (nombrando alguna propiedad conocida que cumplan todos sus elementos, tomados a partir de otro conjunto conocido). Note el lector que es imposible definir por extensión un conjunto infinito.

$$A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$$

Conjunto definido por extensión

$$A = \{x : N \mid x < 7\}$$

Conjunto definido por comprensión

Cuando debemos definir un conjunto por comprensión, como en el ejemplo $A = \{x : N \mid x < 7\}$, es importante recalcar que debe especificarse el conjunto de dónde se seleccionarán los elementos que satisfacen la propiedad, en este caso N. De forma genérica, decimos que este conjunto es el universo, y en general se denota como U.

En general, utilizaremos letras mayúsculas para representar conjuntos y minúsculas para representar elementos. Para un conjunto A, escribiremos $x \in A$ si x es un elemento de A, y $x \notin A$ si x no es un elemento de A. La idea de pertenencia nos servirá para definir algunas relaciones conocidas, por ejemplo:

<u>Igualdad</u> $$C = C' := (\forall e : e \in C \leftrightarrow e \in C')$$

<u>Inclusión</u> $$C \subseteq C' := (\forall e : e \in C \rightarrow e \in C')$$

Y este par de definiciones sencillas nos permitirían construir nuestro primer teorema:

<u>Teorema</u> $$C = C' \leftrightarrow C \subseteq C' \wedge C' \subseteq C$$

<u>Demostración</u> Según la definición de igualdad:

$$C = C' \leftrightarrow (\forall e : e \in C \leftrightarrow e \in C')$$

Utilizando la semántica del operador *"si y solo si"*:

$$(\forall e : e \in C \leftrightarrow e \in C') \leftrightarrow (\forall e : e \in C \rightarrow e \in C') \wedge (\forall e : e \in C' \rightarrow e \in C)$$

Aplicando la definición de inclusión a cada lado de la conjunción:

$$(\forall e : e \in C \rightarrow e \in C') \wedge (\forall e : e \in C' \rightarrow e \in C) \leftrightarrow C \subseteq C' \wedge C' \subseteq C$$

Finalmente:

$$C = C' \leftrightarrow C \subseteq C' \wedge C' \subseteq C$$

Pero, ¿qué son los operadores $\leftrightarrow$, $\rightarrow$ y $\wedge$?... ¿qué significa $\forall$?... ¿cómo podemos estar seguros de la validez del razonamiento anterior?

Todas estas cuestiones las trataremos formalmente cuando veamos los contenidos de lógica; mientras tanto asumiremos la semántica de los operadores lógicos y la validez de los razonamientos, que es lo que se hace en todo curso de matemáticas que no tiene un curso previo de lógica. El objetivo de estas acotaciones es notar la necesidad de contar con un marco teórico y formal que permita asegurar la validez de nuestros razonamientos.

Como hemos dicho, estamos en libertad de decidir qué conjuntos pertenecen a nuestra teoría. Si en nuestra teoría se da que $e \in C$ y a la vez $e \notin C$, nuestra teoría cae. Veremos más adelante que existen ejemplos de teorías donde este tipo de fenómenos suceden. Seguiremos los pasos de la teoría clásica de conjuntos, y eludiremos (de momento) algunas cuestiones escabrosas.

Otros aspectos importantes a tener en cuenta son:

- No permitiremos que nuestros conjuntos tengan elementos repetidos, estas colecciones se denominan multiconjuntos.
- El orden de los elementos no será relevante, las colecciones donde el orden de los elementos es relevante se denominan listas.

A la hora de enfrentarse a un problema, antes de decidir utilizar la teoría de conjuntos para modelarlo, es importante entonces preguntarse si se aceptan elementos repetidos y si el orden de los elementos es relevante.

Para continuar, serán necesarias algunas cuantas definiciones.

Conjunto vacío

El conjunto vacío es el único conjunto que no contiene elementos.
Se denota como $\varnothing$ o $\{\ \}$.

Subconjunto

Decimos que C es un subconjunto de C' cuando cada elemento de C es un elemento de C', y lo notamos:

$$C \subseteq C' := (\forall e : e \in C \rightarrow e \in C')$$

Subconjunto propio

Decimos que C es un subconjunto propio de C' cuando cada elemento de C es un elemento de C', y existe un elemento en C' que no es elemento de C, lo que notamos:

$$C \subset C' := (\forall e : e \in C \rightarrow e \in C') \wedge (\exists x : x \in C' \wedge x \notin C)$$

Cardinal

Para cualquier conjunto finito A, $|A|$ denota el número de sus elementos, y se conoce como el cardinal, o tamaño, de A.

Igualdad

Dos conjuntos C y C' son iguales si cada uno de ellos es subconjunto del otro.

$$C = C' := C \subseteq C' \wedge C' \subseteq C$$

Conjunto potencia

El conjunto potencia de un conjunto A, que se denota $P(A)$, es el conjunto de todos los subconjuntos de A, es decir: $P(A) = \{S \mid S \subseteq A\}$

Si consideramos, por ejemplo, el conjunto $A = \{1,2,3\}$, tendríamos que el conjunto potencia

$$P(A) = \{\{\ \}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

Las combinaciones posibles de los subconjuntos se obtienen haciendo pertenecer o no cada uno de los elementos en el subconjunto.

Cada subconjunto se puede obtener con una respuesta diferente a la combinación de preguntas ¿el 1 pertenece al subconjunto?, ¿el 2 pertenece al subconjunto? y ¿el 3 pertenece al subconjunto?

Existen dos respuestas para la primera pregunta, para cada una de esas respuestas existen otras dos respuestas para la segunda, y para cada combinación de respuestas a la primera y segunda pregunta, existen otras dos respuestas para la tercera.

$1 \in S$	$2 \in S$	$3 \in S$	S
No	No	No	$\{\ \}$
Si	No	No	$\{1\}$
No	Si	No	$\{2\}$
Si	Si	No	$\{1,2\}$
No	No	Si	$\{3\}$
Si	No	Si	$\{1,3\}$
No	Si	Si	$\{2,3\}$
Si	Si	Si	$\{1,2,3\}$

En el caso del ejemplo tenemos $2^3 = 8$ subconjuntos posibles, y en el caso general, cuando $|A| = n$, se tiene que $|P(A)| = 2^n$.

Aún nos faltan unas pocas definiciones más sobre operaciones de conjuntos:

<u>Unión</u> $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

<u>Intersección</u> $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

<u>Diferencia</u> $A - B = \{x \mid x \in A \vee x \notin B\}$

<u>Diferencia simétrica</u> $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

Diremos que dos conjuntos son disjuntos si su intersección es vacía.

Extenderemos ahora la teoría presentada hasta aquí para abarcar los conceptos de relaciones y funciones.

<u>Producto cartesiano</u> $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$

Diremos que los elementos de $A \times B$ son pares ordenados, y dados dos elementos de $A \times B$, (a,b) y (c,d) diremos que $(a,b) = (c,d) \leftrightarrow a = c \wedge b = d$

<u>Ejercicios</u>

Considere el lector los conjuntos $A = \{0,1\}$ y $B = \{x, y, z\}$, determine $A \times B$ y $B \times A$, notando que el producto cartesiano no es conmutativo. Reflexione sobre el producto cartesiano $A \times \varnothing$. Intente el lector una extensión natural del producto cartesiano entre tres conjuntos, y de la definición de igualdad de las ternas ordenadas. Calcule la cardinalidad del producto cartesiano de dos conjuntos a partir de la cardinalidad de aquellos.

Considere el conjunto de los dígitos hexadecimales $H = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, A, B, C, D, E, F\}$ y el de los dígitos binarios $B = \{0,1\}$. En muchos sistemas de numeración, los números se construyen con formaciones ordenadas a partir de los dígitos. ¿Cuántos números de 8 dígitos binarios existen? ¿Cuántos números de dos dígitos hexadecimales existen?

Formule un procedimiento para traducir un número de hasta 8 dígitos binarios a notación hexadecimal, y mencione alguna ventaja de esta última forma de representación.

Relaciones

Tomaremos la idea de los productos cartesianos entre dos conjuntos, para definir el concepto de relación:

<u>Relación</u>

Una relación binaria de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$.
Se dice que una relación de A en A es una relación binaria en A.

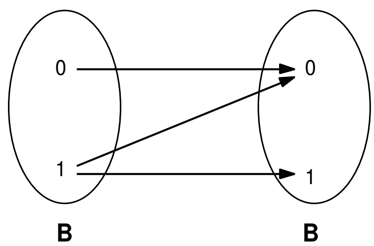
Por ejemplo, dado el conjunto $B = \{0,1\}$, tenemos que $B \times B = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. El siguiente conjunto sería entonces una relación binaria en B : $M = \{(0,0),(1,0),(1,1)\}$.
Podríamos darle algo de semántica a esta relación, notando que cada par ordenado de la misma cumple la condición de tener el primer componente mayor o igual al segundo, y podríamos llamar a la relación *"Mayor o igual que"*.

Dada una relación R llamamos:

- Dominio de la relación, $D(R)$, al conjunto de elementos del primer conjunto que son primer componente de algún par de la relación.
- Imagen de la relación, $I(R)$, al conjunto de elementos del segundo conjunto que son segunda componente de algún par de la relación.
- Relación inversa de la relación, R^{-1}, al conjunto de pares ordenados (y,x) tales que (x,y) están en la relación R.

Dejaremos como ejercicio al lector la formulación matemática de las definiciones de dominio, imagen y relación inversa.

Existen muchas formas de representar una relación, una de ellas es a partir de los diagramas de Venn de los conjuntos involucrados, donde se agrega una línea entre cada par de elementos que pertenecen a la relación.



Si la relación es binaria en un conjunto, se puede simplificar el diagrama anterior, representando los elementos del conjunto una sola vez, y dibujando aristas entre cada par de elementos de la relación. A esta representación se la llama digrafo (o grafo dirigido) de la relación.

Formalmente, un digrafo G sobre un conjunto V está formado por los elementos de V, llamados vértices o nodos de G, y un subconjunto E de $V \times V$, conocido como las aristas (dirigidas) o arcos de G. Note que es posible que existan aristas de un vértice hacia sí mismo, este tipo de aristas se denominan lazos o bucles.

Otra forma de representar relaciones es a través de una matriz de ceros y unos.

Consideremos los conjuntos $A = \{a,b,c\}$, y $B = \{1,2,3\}$, y definamos la relación R, relación binaria de A en B como $R = \{(a,1),(a,2),(b,2),(b,3),(c,1),(c,3)\}$.

Si conservamos fijo el orden de los elementos de los conjuntos, podríamos tener una matriz de $|A|$ filas y $|B|$ columnas, donde para cada elemento (i,j) de la matriz (con $i \in A$, $j \in B$) se tiene:

- 0, si (i,j) no pertenece a la relación
- 1, si (i,j) pertenece a la relación

La figura siguiente muestra la matriz correspondiente a la relación anterior.

$$\mathcal{M}(\mathcal{R}) = \begin{array}{c} \\ (a) \\ (b) \\ (c) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} (1) & (2) & (3) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

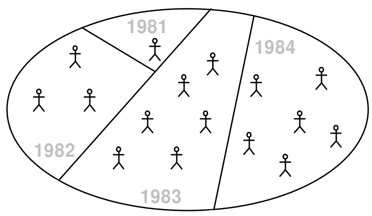
Veremos más adelante que la representación matricial es muy útil para estudiar algunas propiedades de las relaciones.

A continuación daremos algunas definiciones importantes sobre propiedades de las relaciones binarias. Siendo R una relación binaria en A, diremos que:

- R es reflexiva sii $\forall x \in A, (x, x) \in R$
- R es simétrica sii $\forall (x, y) \in R, (y, x) \in R$
- R es antisimétrica sii $\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \rightarrow x = y$
- R es transitiva sii $\forall (x, y), (y, z) \in R, (x, z) \in R$

Cuando una relación es reflexiva, simétrica y transitiva decimos que es una <u>relación de equivalencia</u>. Las relaciones de equivalencia, generan una partición especial del conjunto sobre el que se define la relación binaria. A cada conjunto de los que integran la partición le llamamos clase de equivalencia, y en cada clase encontramos elementos que se dicen equivalentes entre sí.

Para dar un ejemplo concreto, considere el lector el conjunto de alumnos del grupo, y la relación *"nació en el mismo año que"*. Encontrará fácil darse cuenta que la relación es reflexiva (cada uno nació en el mismo año que si mismo), es simétrica (si un alumno nació en el mismo año que otro, aquél nació en el mismo año que el primero), y transitiva (si un alumno nació en el mismo año que un segundo alumno y este segundo alumno nació en el mismo año que un tercero, el primero nació en el mismo año que el tercero). Tenemos que la relación es, por lo tanto, de equivalencia, y divide al grupo en clases de equivalencia según el año en el que nacieron.



Para dar una definición más formal, diremos que siendo R una relación de equivalencia sobre un conjunto A, para cualquier $x \in A$, la clase de equivalencia de x, se define como $[\mathrm{x}] = \{\mathrm{y} \in \mathrm{A} \mid (\mathrm{y}, \mathrm{x}) \in \mathrm{R}\}$.

Cuando una relación es reflexiva, antisimétrica y transitiva decimos que es una <u>relación de orden</u>. Para continuar con un ejemplo relacionado con el conjunto de alumnos del grupo, considere la relación *"no tiene una cédula menor que la de"*. Esta relación es reflexiva (nadie puede tener una cédula menor que su cédula), es antisimétrica (si un alumno no tiene una cédula menor que la de otro, y este otro no tiene una cédula menor que la del primero, sus cédulas deben ser iguales y por tanto deben ser el mismo alumno) y es transitiva (si un alumno no tiene una cédula menor que la de un segundo alumno, y este segundo alumno no tiene una cédula menor que la de un tercero, el primer alumno no tiene una cédula menor que la del tercero). Note que a los efectos de este ejemplo deberíamos excluir a los alumnos indocumentados de nuestro universo.

<u>Ejercicio</u>

Considere el conjunto de los dígitos binarios y analice la relación de igualdad y una relación que contiene los pares de la forma $(x, 1-x)$. Represente la relación con arcos entre diagramas de Venn, como digrafo y como matriz. Verifique si cumplen las propiedades de reflexividad, simetría, antisimetría y transitividad. Diga en cada caso si se trata de una relación de equivalencia (y de ser así cuales son las clases de equivalencia) y una relación de orden.