

Diagramas de Karnaugh

Introducción

Como ya hemos dicho, en el caso práctico de la construcción de circuitos digitales se podría querer minimizar el número de compuertas para reducir el costo, o minimizar el número de niveles del circuito por razones de performance (cada nivel añade un retraso).

Algunas funciones booleanas se pueden simplificar aplicando los axiomas o las propiedades del álgebra de Boole, por ejemplo:

$$f(w, x, y, z) = wx\bar{y}\bar{z} + wx\bar{y}z + wxyz + wxy\bar{z}$$

Podemos considerar por separado las sumas de los primeros dos términos y de los dos términos finales (gracias a la asociatividad de la suma).

$$f(w, x, y, z) = (wx\bar{y}\bar{z} + wx\bar{y}z) + (wxyz + wxy\bar{z})$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto respecto a la suma (sacando factor común), tenemos:

$$f(w, x, y, z) = wx\bar{y}(\bar{z} + z) + wxy(z + \bar{z})$$

Aplicando la conmutatividad de la suma y el complemento de la suma, sabemos que $z + \bar{z} = \bar{z} + z = 1$. Por otro lado 1 es el neutro del producto, por lo que:

$$f(w, x, y, z) = wx\bar{y} + wxy$$

Con argumentos similares podemos reducir la expresión hasta:

$$f(w, x, y, z) = wx(\bar{y} + y) = wx$$

En este ejemplo queda claro que no es posible reducir más la expresión, pero cabe la pregunta si en todas las situaciones podremos llegar a una expresión que tenga la mínima cantidad posible de niveles para construir un circuito eficiente.

Existe un método gráfico, llamado diagrama de Karnaugh (o también mapa de Karnaugh), que permite sistematizar el proceso de la simplificación de las funciones booleanas.

Diagrama de Karnaugh

Este método consiste en representar de forma gráfica una función como suma de productos canónicos y hacerlo de tal forma que sea sencillo establecer procedimientos sistemáticos para hallar las agrupaciones de términos más convenientes para simplificar la expresión.

Esto se logra utilizando una tabla en la cual a cada entrada le corresponde un producto canónico posible, y tal que al pasar de uno a otra cualquiera de sus entradas adyacentes sólo cambie el valor de una de las variables en juego.

Por ejemplo, para tres variables podríamos representar $f(w, x, y)$ en la tabla:

$y \setminus wx$	00	01	11	10
0				
1				

Es importante notar que en la tabla presentada, los valores de w y de x cambian uno a la vez, a medida que se cambia de columna. Si se tienen cuatro variables se mantienen dos por filas y dos por columnas, teniendo el mismo cuidado con el orden de las combinaciones de los valores de las dos variables en las filas.

Para cuatro variables, podríamos representar $f(w, x, y, z)$ en la tabla:

$yz \setminus wx$	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

Luego de tener la tabla, se marcan con un 1 las entradas para las cuales esa combinación de variables hace que la función valga 1.

El método consiste en agrupar "unos" formando los rectángulos más grandes posibles, hasta que todos los "unos" estén en algún rectángulo. La cantidad de "unos" agrupados deben ser una potencia de dos.

Para fijar ideas, vamos a tomar la función $f(w, x, y, z) = wxy\bar{z} + wx\bar{y}z + wxy\bar{z} + wx\bar{y}z$. El diagrama de Karnaugh quedaría como sigue:

$yz \setminus wx$	00	01	11	10
00			1	
01			1	
11			1	
10			1	

La idea que subyace es "no importa cuánto valgan y o z , la función vale 1 cuando w vale 1 y x vale 1". Es fácil ver que esto último es equivalente a decir que la función es wx . Nótese que llegamos al mismo resultado que anteriormente conseguimos con el método algebraico.

La idea general es siempre la misma, una vez que se tiene un rectángulo se determina que variables son las que determinan el resultado en el rectángulo (en el caso anterior w, x son las que determinan el resultado, ya que si ellas cambian el resultado de la función podría ser cero; mientras que el valor de y, z es irrelevante).

En la clase anterior veíamos la función $f(x, y, z) = (x + y)z + \bar{x}(y + z)$ y llegamos a representarla como suma de productos canónicos en la forma $f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz$. El diagrama de Karnaugh para esta función podríamos representarlo como:

$z \setminus xy$	00	01	11	10
0		1		
1	1	1	1	1

Vemos que hay un rectángulo en la fila inferior, que nos dice que los valores de x e y son irrelevantes: en la medida que z sea 1 la función valdrá 1 (aquí ya tenemos un término de la representación simplificada de la función: z).

El otro rectángulo nos dice que independientemente del valor de z , la función valdrá 1 siempre que x sea 0 e y sea 1 (aquí tenemos el otro término de la representación simplificada de la función: $\bar{x}y$).

Tenemos entonces que $f(x, y, z) = z + \bar{x}y$

Ejercicio:

Halle el circuito equivalente de la expresión simplificada de esta función, y compárelo con los circuitos construidos en la clase anterior.