Relaciones

Relaciones de equivalencia y particiones

Ya hemos definido una relación de equivalencia como aquella relación que es reflexiva, simétrica y transitiva. Vamos a demostrar, en forma de teorema, algunas propiedades interesantes de las relaciones de equivalencia.

Si R es una relación de equivalencia en A y $a,b \in A$, entonces:

1. $a \in [a]$
2. $(a,b) \in R \leftrightarrow [a] = [b]$
3. $[a] \neq [b] \rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$

Demostración:

1. Como R es de equivalencia R es reflexiva, por lo que $(a,a) \in R$, luego $a \in \{x \in A \mid (x,a) \in R\}$ y resulta que este conjunto es la definición de $[a]$.

2. Para probar el si y sólo si probaremos la doble implicancia.
Sea x un elemento cualquiera de A tal que $x \in [a]$. Por la definición de clase de equivalencia tenemos que $(x,a) \in R$. Como además R es de equivalencia y por tanto transitiva, la hipótesis $(a,b) \in R$ nos conduce a que $(x,b) \in R$. Esto último implica que $x \in [b]$, y como x es un elemento cualquiera de A, tenemos que $\forall x \in A, x \in [a] \rightarrow x \in [b]$, y esto es exactamente la definición de $[a] \subseteq [b]$. Notando que al ser R de equivalencia R es simétrica, y se tiene entonces que tanto (a,b) como (b,a) están en R, se puede llegar con idéntico argumento a que $[b] \subseteq [a]$, para concluir que $[a] = [b]$.
Para probar el recíproco comenzaremos observando que $[a] = [b]$ implica que $[a] \subseteq [b]$, es decir que $\forall x \in A, x \in [a] \rightarrow x \in [b]$. Dicho de otro modo, tenemos que $\forall x \in A, (x,a) \in R \rightarrow (x,b) \in R$. Ahora bien, al ser R de equivalencia, y por lo tanto simétrica, también se tiene se tiene que $\forall x \in A, (x,a) \in R \rightarrow (a,x) \in R$. Por otro lado, al ser R de equivalencia y por lo tanto transitiva, tenemos que $(a,b) \in R$.

3. Para probar este enunciado procederemos a realizar una reducción al absurdo (supondremos que no se cumple la tesis y llegaremos a un absurdo, con lo cual la tesis debe ser cierta). Si no es cierto que $[a] \cap [b] = \varnothing$, entonces debe haber un elemento en la intersección. Sea $x \mid x \in [a] \cap [b]$. Como $x \in [a]$ tenemos que $(x,a) \in R$ y como $x \in [b]$ tenemos que $(x,b) \in R$. Como R de equivalencia R es simétrica, y se tiene que $(a,x) \in R$. Como además al ser R de equivalencia es transitiva tenemos que $(a,b) \in R$ y por el teorema 2 $[a] = [b]$. Pero por hipótesis sabemos que $[a] \neq [b]$ con lo cual llegamos a un absurdo. Como el absurdo se deriva de la suposición de la falsedad de $[a] \cap [b] = \varnothing$, se tiene que la tesis debe ser cierta.

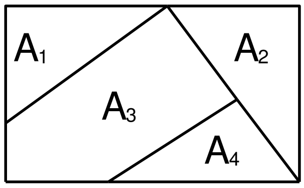
Para continuar, necesitaremos introducir el concepto de partición de un conjunto no vacío.

Partición

Dado un conjunto $A \neq \varnothing$, llamaremos partición de A a una colección de subconjuntos no vacíos de A que verifican:

1. $\bigcup_i A_i = A$
2. Los subconjuntos A_i son disjuntos dos a dos: $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$

Es bastante intuitiva la idea de partición de un conjunto, y coincide con la idea de partir un conjunto en subconjuntos disjuntos.



Sea A el conjunto de los dígitos decimales, diga si las siguientes son particiones de A .

1. $\{\{0,1,2,3,4,5\},\{5,6,7,8,9\}\}$
2. $\{\{2,4,6,8\},\{1,3,5,7,9\}\}$
3. $\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2,6\},\{3,7\}\}$

Recordará el lector que cuando hablamos de las relaciones de equivalencia dijimos que las mismas generan una partición especial del conjunto sobre el que se define la relación, y las llamamos clases de equivalencia. En efecto, las clases de equivalencia son una partición del conjunto sobre el que se define la relación.

Para demostrar que las clases de equivalencia forman una partición no hay más que advertir, por un lado, que el teorema 3 que acabamos de demostrar indica que cualesquiera dos clases de equivalencia distintas son disjuntas; y por otro lado que el teorema 1 nos permite afirmar que todo elemento del conjunto está en una clase de equivalencia y, por lo tanto, en la unión de todas las clases de equivalencia.

Conjunto cociente

Al conjunto de todas las clases de equivalencia definidas por R sobre A , lo llamaremos conjunto cociente y lo representaremos como A/R .

Ejemplo:

Considere el conjunto de los números racionales $Q=\{a/b \mid a \in Z, b \in Z^*\}$ y la relación R definida de la siguiente forma $(a/b, c/d) \in R \leftrightarrow ad = bc$. La relación contiene las parejas de fracciones equivalentes, y divide a Q en clases de equivalencia de fracciones equivalentes. El conjunto cociente Q/R contiene las clases de equivalencia, por lo que no aparecen (clases de equivalencia de) fracciones equivalentes en él.