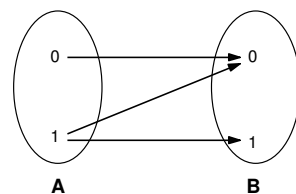


Funciones

Definición de función

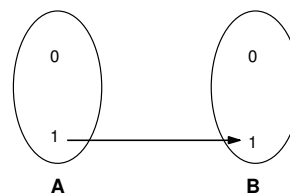
Para dos conjuntos no vacíos A y B , una función f de A en B (que se denota $f : A \rightarrow B$), es una relación de A en B en la que cada elemento de A aparece exactamente una vez como la primera componente de un par ordenado en la relación. Cuando (a, b) es un par ordenado de f se escribe $f(a) = b$.

En la siguiente figura se muestran ejemplos de relaciones que no son funciones, explicando el motivo por el cuál no lo son.



$$R = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$$

1 aparece más de una vez como primera componente



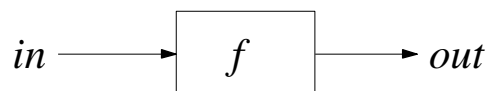
$$R = \{(1,1)\}$$

0 nunca aparece como primera componente

De forma que tenemos que las funciones son un subconjunto de las relaciones. ¿Cuántas funciones $f : A \rightarrow B$ existen si $|A| = n$ y $|B| = m$?

Para una función $f : A \rightarrow B$, A es el dominio de f y B es el codominio de f . El subconjunto de B formado por aquellos elementos que aparecen como segundos componentes de los pares ordenados de f se conoce como la imagen de f .

Una forma de ver las funciones (muy utilizada en computación) es como una "caja negra" que toma entradas y devuelve salidas. Antes de continuar, haremos algunas reflexiones sobre el uso de funciones en los lenguajes de programación.



En computación se utilizan funciones en muchos ámbitos, y son un elemento constitutivo de la mayoría de los lenguajes de programación, pero hay que tener en cuenta que el universo de la computación puede ser más dinámico:

- Las funciones no tienen por qué ser determinísticas. En muchas aplicaciones (piense en los juegos de azar) es conveniente y hasta necesario contar con funciones que devuelvan un número al azar. Es decir, si probamos la función dos veces con la misma entrada, no tenemos por qué obtener la misma salida. Dicho de otra forma, el valor de $f(a)$ no está determinado de antemano.
- Las salidas pueden depender de datos externos que se modifican con el tiempo. Piense en una función sueldo que recibe un número de cédula y devuelve el sueldo de la persona. La función podría contener una consulta a una base de datos, posiblemente hacer algún otro cálculo y retornar el resultado. Es posible (y deseable, dada la inflación) que los datos que lee esta función se modifiquen (aumenten) con el tiempo.
- El dominio de la función suele ser un subconjunto propio del conjunto de entradas posibles. En el caso de la función sueldo, no todos los números que es posible ingresar corresponderán a una cédula válida y mantenida en el sistema, de forma que hay que tener algún mecanismo de validación de los datos de entrada.

Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva cuando $\forall x, y \in A, x \neq y \rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Lo que no puede ocurrir en una función inyectiva es que dos elementos distintos del dominio se relacionen con el mismo elemento del codominio. ¿Cuántas funciones inyectivas existen?

Una observación interesante es que si una función $f : A \rightarrow B$ es inyectiva, y el conjunto A tiene n elementos, deben existir n imágenes distintas por f en B . Por lo tanto, el conjunto B debe tener al menos tantos elementos como A . En otras palabras: f inyectiva $\rightarrow |A| \leq |B|$.

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es sobreyectiva cuando $\forall b \in B, \exists a \in A \mid f(a) = b$.

Dicho de otra forma, una función es sobreyectiva cuando el conjunto de las imágenes de f es el codominio (en este caso B). Si existen $|B| = m$ imágenes por f , al ser f una función existirán al menos m elementos en A . En otras palabras: f sobreyectiva $\rightarrow |A| \geq |B|$.

Diremos que una función $f : A \rightarrow B$ es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva. Las observaciones sobre las cardinalidades de los conjuntos en los casos anteriores nos permiten afirmar que $|A| = |B|$. Nótese que en los casos anteriores nos valimos de asignar un valor finito a la cardinalidad de los conjuntos, ¿qué sucede con conjuntos infinitos?

Note el lector que no nos preguntamos sobre el número de funciones sobreyectivas que pueden existir entre dos conjuntos, la respuesta a esa pregunta excede los contenidos de este curso y requiere de los llamados números de Stirling de segundo tipo.