Funciones y Operaciones

Operaciones unarias y binarias

- Dados dos conjuntos no vacíos A y B, cualquier función $f: A \times A \rightarrow B$ es una operación binaria en A. Si $B \subseteq A$, se dice que la operación binaria es cerrada en A.
- Una función $g: A \rightarrow A$ es una operación unaria en A.

Conmutatividad y asociatividad de operaciones

Sea $f: A \times A \rightarrow B$ una operación binaria en A.

- Diremos que f es conmutativa si $\forall (a,b) \in A \times A, f(a,b) = f(b,a)$
- Si $B \subseteq A$, diremos que f es asociativa si $\forall a,b,c \in A, f(f(a,b),c) = f(a, f(b,c))$

Neutro

Sea $f: A \times A \rightarrow B$ una operación binaria en A.
Un elemento $x \in A$ es un neutro de f si $\forall a \in A, f(a,x) = f(x,a) = a$

<u>Teorema:</u>

Si $f: A \times A \rightarrow B$ tiene un elemento neutro, entonces dicho elemento es único. La demostración queda a cargo del lector.

Función identidad

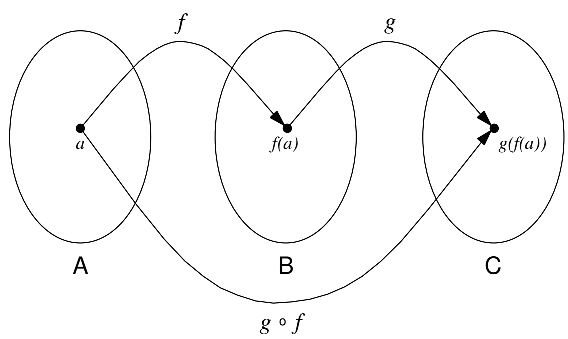
La función $1_A : A \rightarrow A$, definida como $\forall a \in A, 1_A(a) = a$ es la función identidad para A.

Igualdad de funciones

Si $f, g: A \rightarrow B$, diremos que $f = g$ si $\forall a \in A, f(a) = g(a)$

Composición de funciones

Sean $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$.
Definimos la función compuesta $g \circ f: A \rightarrow C$ como $\forall a \in A, (g \circ f)(a) = g(f(a))$



Propiedades de la composición de funciones

Sean $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$.

- Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva.
  Sean $a_1, a_2 \in A$ con $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$.
  Por la definición de composición se tiene que $g(f(a_1)) = g(f(a_2))$.
  La inyectividad de g implica que $f(a_1) = f(a_2)$ y luego la inyectividad de f implica que $a_1 = a_2$.

- Si f y g son sobreyectivas, entonces $g \circ f$ es sobreyectiva.
  Sea $z \in C$, como g es sobreyectiva, $\exists y \in B / g(y) = z$
  Luego, al ser f sobreyectiva, $\exists x \in A / f(x) = y$.
  Tenemos entonces que $\forall z \in C, \exists x \in A / g(f(x)) = z$, y entonces, $g \circ f$ es sobreyectiva.

- La composición de funciones es asociativa
  Tenemos que $((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)))$
  Por otro lado $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$
  Entonces $\forall x \in A, ((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$ con lo cual la composición es asociativa.

Función invertible

Una función $f : A \to B$ es invertible si $\exists g : B \to A / g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$

Teorema:
Si una función $f : A \to B$ es invertible y $g : B \to A$ satisface que $g \circ f = 1_A \wedge f \circ g = 1_B$, entonces esta función g es única.

Supongamos que existe otra función $h : B \to A$ con $h \circ f = 1_A \wedge f \circ h = 1_B$.

Entonces $h = h \circ 1_B = h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = 1_A \circ g = g$, por lo cual la función inversa, de existir, es única. A esta función g (única) se la llama inversa de f, y se la denota como f^{-1}.

Teorema:
Una función $f : A \to B$ es invertible si y sólo si es biyectiva. La demostración se deja a cargo del lector (puede consultar la sección 5.6 de Grimaldi).

Teorema:
Si $f : A \to B$, $g : B \to C$ son funciones invertibles, entonces $g \circ f : A \to C$ es invertible y se cumple que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Para demostrar la primera parte basta observar que f y g son invertibles si y sólo si son biyectivas, lo cual implica que son invectivas y sobreyectivas. Que f y g sean inyectivas implica que $g \circ f$ sea inyectiva, y que f y g sean sobreyectivas implica que $g \circ f$ sea sobreyectiva. Por lo tanto tenemos que $g \circ f$ es biyectiva, y entonces invertible. Para demostrar la segunda parte hay que advertir que $(g \circ f)^{-1}$ está definida $C \to A$. Sea $c \in C$ y $(g \circ f)^{-1}(c) = a$. Tenemos entonces que $(g \circ f)(a) = c$ o, de otro modo, $g(f(a)) = c$. Entonces $\exists b \in B / f(a) = b \wedge g(b) = c$, lo que implica $f^{-1}(b) = a \wedge g^{-1}(c) = b$. Simplificando se tiene que $f^{-1}(g^{-1}(c)) = a$ lo que nos lleva a $(f^{-1} \circ g^{-1})(c) = a$.

Resumiendo: $\forall c \in C, (g \circ f)^{-1}(c) = (f^{-1} \circ g^{-1})(c)$, lo que demuestra que las funciones son iguales.