Relaciones de recurrencia

Sucesiones

Llamaremos una sucesión a una función de dominio natural, $f : N \to X$.

En lugar de utilizar la notación usual para funciones utilizaremos un subíndice, y a_n representará $a(n)$. Llamaremos términos de la sucesión a cada uno de los a_n : $a_0, a_1, a_2, ...$

Consideremos la siguiente definición recursiva:

- $a(0) = 5$
- $a(n) = 3.a(n-1)$ para $n \geq 1$

Si adoptamos la notación de los subíndices, podemos escribir la sucesión presentada como:

$a_0 = 5$ y $a_n = 3.a_{n-1}$ para $n \geq 1$

Este es un ejemplo de progresión geométrica, donde cada término sobre el anterior da una constante, llamada razón común (en este caso 3).

Relaciones de recurrencia

La progresión geométrica es un ejemplo de relación de recurrencia lineal (cada término con subíndice aparece elevado a la primera potencia) y de primer orden (cada término depende únicamente del inmediatamente anterior).

Si escribimos algunos términos de la relación de recurrencia dada, notaremos que $a_n = 5.(3^n)$, $\forall n \geq 0$.

$$a_0 = 5$$
$$a_1 = 3.a_0 = 5.(3)$$
$$a_2 = 3.a_1 = 3.5.(3) = 5.(3^2)$$
$$a_3 = 3.a_2 = 3.5.(3^2) = 5.(3^3)$$

De forma general, la solución de la relación de recurrencia:

$$\begin{cases} a_0 = C \\ a_n = k.a_{n-1}, \ n \geq 1 \end{cases}$$

está dada por $a_n = C.k^n, \ n \geq 0$. (Ejercicio: Demostrarlo por inducción completa)

Note que una forma alternativa de escribir $a_n = k.a_{n-1}$ es $a_n - k.a_{n-1} = 0$. Cuando estas diferencias (las relaciones de recurrencia también suelen llamarse ecuaciones en diferencias) dan siempre cero, la relación se llama homogénea.

Un ejemplo de relación no homogénea puede ser la siguiente:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n - a_{n-1} = (n-1), \ n \geq 1 \end{cases}$$

Ejercicio: Escribir algunos términos de la sucesión a_n y encontrar la solución de la ecuación.