

Ecuaciones en diferencias

Caso general

Nos concentraremos en ecuaciones lineales, homogéneas y con coeficientes constantes. Buscaremos entonces sucesiones a_n que sean solución de ecuaciones en diferencias como la siguiente:

$$C_n \cdot a_n + C_{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + C_{n-k} \cdot a_{n-k} = 0 \quad \forall n \geq k$$

donde $C_n, C_{n-1}, \dots, C_{n-k}$ son constantes, $C_n \neq 0$, $C_{n-k} \neq 0$ y $k \geq 1$.

Observemos que si dividimos entre C_n obtenemos:

$$a_n + (C_{n-1}/C_n) \cdot a_{n-1} + \dots + (C_{n-k}/C_n) \cdot a_{n-k} = 0 \quad \forall n \geq k$$

Y simplemente renombrando:

$$a_n + B_{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + B_{n-k} \cdot a_{n-k} = 0 \quad \forall n \geq k$$

Comenzaremos observando dos propiedades de las soluciones. Supongamos que (a_n) , (b_n) son soluciones de la ecuación en diferencias, entonces:

- Es solución (c_n) , $c_n = a_n + b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- Es solución (d_n) , $d_n = r \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in \mathbb{R}$

Ejercicio: Demostrar las afirmaciones anteriores.

Si una ecuación en diferencias tiene, por ejemplo, soluciones 2^n y 3^n , también será solución cualquier combinación lineal de esas soluciones $a_n = p \cdot 2^n + q \cdot 3^n \quad \forall p, q \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que hay todo un espacio vectorial de soluciones para una ecuación en diferencias (en este caso de dimensión 2), y la solución particular (que en el ejemplo implicaría determinar p y q) dependerá de las condiciones iniciales (y se necesitarán dos condiciones iniciales para formar un sistema con p y q).

Ecuaciones en diferencias de segundo grado

Nos remitimos ahora a un caso más acotado que el general, que se da cuando $k = 2$. La ecuación en diferencias de segundo orden, con dos condiciones iniciales, queda de la forma:

$$\begin{cases} a_n = \alpha \cdot a_{n-1} + \beta \cdot a_{n-2} & \forall n \geq 2 \\ a_0 = A \\ a_1 = B \end{cases}$$

Sabemos que una solución existe, ya que bastaría con despejar a_n y tomar las condiciones iniciales a_0, a_1 para comenzar a hallar los términos de la sucesión (a_n) . Por otro lado tendríamos una única forma de hallar cada término, con lo cual la solución, además de existir, es única.

La idea será partir de la ecuación (sin considerar las condiciones iniciales), hallar la forma de las soluciones (posiblemente paramétricas) y finalmente determinar los parámetros mediante un sistema de ecuaciones.

Vamos a buscar soluciones que sean de la forma $a_n = r^n \quad \forall n \geq 0$, donde r es un número no nulo que determinaremos en algún momento. Si esto es una solución, debe cumplirse que:

$$r^n = \alpha.r^{n-1} + \beta.r^{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

Pero si dividimos entre r^{n-2} tenemos:

$$r^2 = \alpha.r + \beta$$

Lo que puede describirse como:

$$r^2 - \alpha.r - \beta = 0$$

A esta última ecuación la llamamos ecuación característica de la ecuación en diferencias, y el camino a seguir a partir de este momento dependerá de las raíces de esta ecuación.

- Cuando la ecuación característica tiene dos raíces reales distintas r_1 y r_2 , sabemos que r_1^n y r_2^n son soluciones de la ecuación en diferencias, y tenemos una solución general de la forma $a_n = p.r_1^n + q.r_2^n$. Para hallar una solución particular en el espacio vectorial de las soluciones (determinar p y q) bastará con aplicar las condiciones iniciales.
- Cuando la ecuación característica tiene una raíz real doble r_1 , sabemos que r_1^n es una solución de la ecuación en diferencias. Además, al tener la ecuación característica una solución doble r_1 , el determinante $\alpha^2 + 4\beta$ debe ser cero. Si despejamos β , sustituimos en la ecuación característica y resolvemos la ecuación de segundo grado en α , llegamos a que $\alpha = 2r_1$ y $\beta = -r_1^2$. Luego, en este caso, la ecuación en diferencias debe obligatoriamente tener la forma $a_n = 2.r_1.a_{n-1} - r_1^2.a_{n-2}$. No será difícil para el lector verificar que $a_n = n.r_1^n$ es otra solución de la ecuación en diferencias. Finalmente, la solución general tiene la forma $a_n = p.r_1^n + q.n.r_1^n$.
- Cuando la ecuación característica tiene dos raíces complejas (que deben ser conjugadas) $z_1 = a + bi$ y $z_2 = a - bi$, es posible verificar que z_1^n y z_2^n son soluciones de la ecuación en diferencias, por lo cual la solución general tiene la forma $a_n = p.z_1^n + q.z_2^n$. Si bien este resultado es válido, al ser z_1 y z_2 complejos puede no ser cómodo de utilizar, y suele utilizarse otro par de soluciones linealmente independientes que conforman el mismo espacio vectorial de soluciones: $a_n = p.|z_1|^n \cos(n.\theta) + q.|z_1|^n \sen(n.\theta)$, donde $\theta = \arg(z_1)$.