Lógica proposicional

Comenzaremos el estudio formal de las bases de la lógica: la lógica proposicional. Deberemos, en primera instancia tener una definición de proposición.

> Una proposición es una oración afirmativa de la cual podemos decir que es verdadera o falsa.

Detrás de esta definición está implícito que hay una noción de verdad, las proposiciones son verdaderas o falsas.

Como hemos dicho antes, en lógica queremos estudiar el razonamiento, y por lo tanto no será suficiente con conocer el valor de verdad de proposiciones concretas, sino que nos centraremos en la noción de consecuencia. Construiremos una teoría para definir en ella la sintaxis y la semántica de nuestras proposiciones, y veremos mecanismos que nos permitirán saber cómo a partir del valor de verdad de algunas proposiciones podemos llegar al valor de verdad de otras.

Para formalizar esto, haremos lo siguiente:

- Definiremos inductivamente el lenguaje de las proposiciones lógicas, al que llamaremos $PROP$
- Definiremos funciones por recursión primitiva, de $PROP$ en un conjunto con los valores de verdad, a las que llamaremos valuaciones, $v : PROP \rightarrow \{0,1\}$
- Veremos dos nociones de razonamiento que resultarán equivalentes, una basada en la sintaxis y otra en la semántica.

El conjunto $PROP$

Como hemos visto, un lenguaje es un subconjunto de Σ^*, para algún alfabeto Σ. Comenzaremos definiendo el alfabeto (conjunto de símbolos) que utilizaremos en la lógica proposicional.

Σ_{Prop} contiene:

- Letras de proposición: $p_0, p_1, p_2, \ldots$
- Conectivos: $\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- Símbolos auxiliares: $(,)$

Con este alfabeto podemos formar muchas palabras concatenando sus símbolos, por ejemplo, $(p_0 \rightarrow p_1) \in \Sigma^*_{\text{Prop}}$ y $(\wedge \rightarrow \neg \vee)(\leftrightarrow) p_0) \in \Sigma^*_{\text{Prop}}$. Queda claro que no cualquier elemento de Σ^*_{Prop} será una frase válida en la lógica proposicional, y definimos $PROP$ de la siguiente manera:

> $PROP$ es el conjunto definido inductivamente por las siguientes cláusulas:
>
> i. $p_i \in PROP, \forall i \in N$
> ii. $\perp \in PROP$
> iii. Si $\alpha \in PROP$ y $\beta \in PROP$, entonces $(\alpha \wedge \beta) \in PROP$
> iv. Si $\alpha \in PROP$ y $\beta \in PROP$, entonces $(\alpha \vee \beta) \in PROP$
> v. Si $\alpha \in PROP$ y $\beta \in PROP$, entonces $(\alpha \rightarrow \beta) \in PROP$
> vi. Si $\alpha \in PROP$ y $\beta \in PROP$, entonces $(\alpha \leftrightarrow \beta) \in PROP$
> vii. Si $\alpha \in PROP$, entonces $(\neg \alpha) \in PROP$

Principio de inducción primitiva para $PROP$

No llamará la atención al lector, el enunciado del principio de inducción primitiva para $PROP$:

> Principio de inducción primitiva para $PROP$.
>
> Sea P una propiedad sobre $PROP$ que cumple:
>
> - $P(p_i) \forall i \in N$
> - $P(\perp)$
> - Si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$, entonces $P(\alpha \wedge \beta)$
> - Si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$, entonces $P(\alpha \vee \beta)$
> - Si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$, entonces $P(\alpha \rightarrow \beta)$
> - Si $P(\alpha)$ y $P(\beta)$, entonces $P(\alpha \leftrightarrow \beta)$
> - Si $P(\alpha)$, entonces $P(\neg \alpha)$
>
> Entonces, se cumple $P(\alpha)$ para toda $\alpha \in PROP$

Secuencia de formación

Una secuencia $\alpha_{0,}\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ de elementos de Σ^*_{Prop} es una secuencia de formación para α si y sólo si $\alpha_n = \alpha$ y para todo $k \leq n$ se cumple una de las siguientes:

- $\alpha_k \in \{\perp, p_0, p_1, p_2, ...\}$
- $\alpha_k = (\alpha_i \oplus \alpha_j)$ con $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y con $i, j < k$
- $\alpha_k = (\neg \alpha_j)$ con $j < k$

Subfórmula

Dadas $\alpha, \varphi \in PROP$, diremos que φ es subfórmula de α si se cumple alguna de las siguientes:

- $\alpha = \varphi$
- $\alpha = (\varphi_1 \oplus \varphi_2)$ con $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ y φ es subfórmula de φ_1 o φ_2
- $\alpha = (\neg \varphi_1)$ y φ es subfórmula de φ_1

Esquema de recursión primitiva para $PROP$

Una función $f : PROP \rightarrow B$ queda definida por las siguientes ecuaciones:

- $f(\perp) := ...$
- $f(p_i) := ... \qquad \forall i \in N$
- $f(\alpha \oplus \beta) := ...\alpha...\beta...f(\alpha)...f(\beta)...$ con $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
- $f(\neg \alpha) := ...\alpha...f(\alpha)...$