Deducción natural

Introducción

Como hemos visto, podemos demostrar la veracidad de una consecuencia lógica a partir del estudio semántico del valor de verdad de la frase a probar. Alternativamente, podríamos valernos de consecuencias lógicas conocidas para modificar las hipótesis, con pasos debidamente justificados, hasta llegar a la frase que pretendemos probar, mediante argumentos sintácticos.

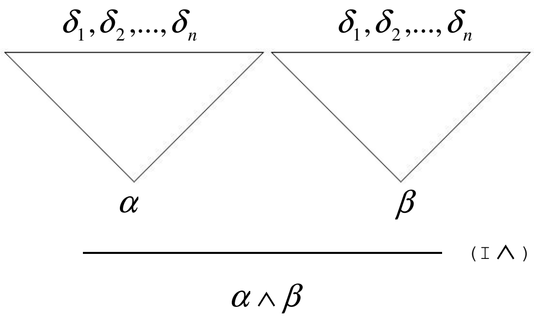
La clase pasada veíamos que la consecuencia lógica $\alpha, \beta \models \alpha \wedge \beta$ justificaba el siguiente razonamiento:

"Si tenemos una prueba para α a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, y tenemos una prueba para β a partir del mismo conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$; entonces tenemos una prueba para $\alpha \wedge \beta$, también a partir del conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$".

Si dispusiéramos de suficientes reglas, podríamos construir teoremas en forma de árboles, donde cada paso estaría dado por una de estas reglas, que pueden ser de introducción o de eliminación (hablando de un conectivo).

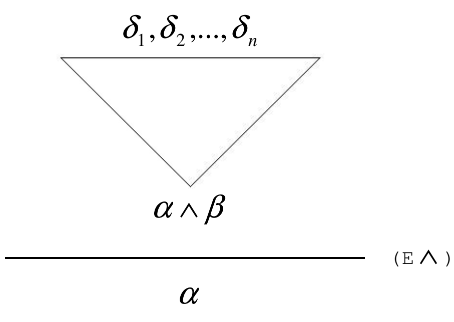
Introducción de $\wedge$

Esta regla nos dice cómo probar una conjunción. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, probamos α y probamos β, luego utilizamos esta regla y tenemos una prueba de $\alpha \wedge \beta$.



Eliminación de $\wedge$

Esta regla nos dice cómo utilizar una conjunción. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, probamos $\alpha \wedge \beta$, entonces tenemos una prueba para α.



Observación: De la misma forma, con las mismas hipótesis tenemos una prueba para β, con lo cual tenemos dos reglas de eliminación de $\wedge$.

Introducción de $\rightarrow$

Esta regla nos dice cómo probar una implicancia. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, más la hipótesis adicional que surge al suponer α, probamos β, tenemos una prueba de $\alpha \rightarrow \beta$.

$$\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \quad \cancel{\alpha}$$

$$\frac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta}\ (\mathrm{I} \rightarrow)$$

Eliminación de $\rightarrow$

Esta regla nos dice cómo utilizar una implicancia. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, probamos α, y a partir del mismo conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ probamos $\alpha \rightarrow \beta$, tenemos una prueba de β.

$$\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \qquad \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$$

$$\frac{\alpha \qquad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}\ (\mathrm{E} \rightarrow)$$

Introducción de $\vee$

Esta regla nos dice cómo probar una disyunción. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, probamos α, tenemos una prueba de $\alpha \vee \beta$.

$$\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}\ (\mathrm{I} \vee)$$

Observación: De la misma forma, si con las mismas hipótesis tenemos una prueba para β, también tenemos una prueba para $\alpha \vee \beta$, con lo cual tenemos dos reglas de introducción de $\vee$.

Eliminación de $\vee$

Esta regla nos dice cómo utilizar una disyunción. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, probamos $\alpha \vee \beta$ *,* y tanto suponiendo α como suponiendo β podemos probar δ , entonces tenemos una prueba de δ .

$$\begin{array}{ccc} \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n & \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \, \cancel{\alpha} & \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \, \cancel{\beta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\dfrac{\alpha \vee \beta \qquad \delta \qquad \delta}{\delta} \; (\mathrm{E}\vee)$$

Introducción de $\leftrightarrow$

Esta regla nos dice cómo probar un bicondicional. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, suponiendo α probamos β , y con el mismo conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, suponiendo β probamos α , entonces tenemos una prueba de $\alpha \leftrightarrow \beta$.

$$\begin{array}{cc} \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \, \cancel{\alpha} & \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \, \cancel{\beta} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\dfrac{\beta \qquad \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta} \; (\mathrm{I}\leftrightarrow)$$

Eliminación de $\leftrightarrow$

Esta regla nos dice cómo utilizar un bicondicional. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$, probamos $\alpha \leftrightarrow \beta$, y a partir del mismo conjunto de hipótesis probamos α *,* tenemos una prueba de β .

$$\begin{array}{cc} \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n & \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta} \; (\mathrm{E}\leftrightarrow)$$

Observación: De la misma forma, si con las mismas hipótesis tenemos una prueba para $\alpha \leftrightarrow \beta$ y otra para β , también tenemos una prueba para α , con lo cual tenemos dos reglas de eliminación de $\leftrightarrow$.

Introducción de $\neg$

Esta regla nos dice cómo probar una negación. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, suponiendo α probamos $\perp$, entonces tenemos una prueba de $\neg\alpha$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \ \cancel{\alpha} \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\neg\alpha}\ (\mathrm{I}\neg)$$

Eliminación de $\neg$

Esta regla nos dice cómo utilizar una negación (lo que nos sirve para llegar al absurdo). Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, probamos α, y a partir del mismo conjunto de hipótesis probamos $\neg\alpha$, entonces tenemos una prueba de $\perp$.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \\ \vdots \\ \alpha\end{array} \qquad \begin{array}{c}\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \\ \vdots \\ \neg\alpha\end{array}}{\perp}\ (\mathrm{E}\neg)$$

Eliminación de $\perp$

Esta regla nos dice cómo utilizar el absurdo. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, probamos $\perp$, entonces tenemos una prueba de α.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \quad \neg\alpha\beta \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\alpha}\ (\mathrm{E}\perp)$$

Reducción al absurdo

Como en el caso anterior, esta regla nos dice cómo utilizar el absurdo. Si a partir de un conjunto de hipótesis $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, más la suposición de $\neg\alpha$, probamos $\perp$, entonces tenemos una prueba de α.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n \quad \cancel{\neg\alpha} \\ \vdots \\ \perp\end{array}}{\alpha}\ \texttt{(RAA)}$$

En todos los casos, las hipótesis de las pruebas son las hojas no tachadas del árbol, mientras que la raíz es la consclusión. Las hojas tachadas del árbol son hipótesis locales.

Ejemplos

1) $\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\cancel{\alpha \wedge \beta}^{(1)}}{\beta}\ \texttt{(E}\wedge\texttt{)} \qquad \dfrac{\cancel{\alpha \wedge \beta}^{(1)}}{\alpha}\ \texttt{(E}\wedge\texttt{)}}{\beta \wedge \alpha}\ \texttt{(I}\wedge\texttt{)}}{\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \wedge \alpha}\ \texttt{(I}\rightarrow\texttt{)}\ \textbf{(1)}$$

2) $\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}\ \texttt{(E}\wedge\texttt{)} \qquad \dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}\ \texttt{(E}\wedge\texttt{)}}{\beta \wedge \alpha}\ \texttt{(I}\wedge\texttt{)}$$