Matemática Discreta y Lógica 2

Lógica de predicados

1 Cuantificadores

El lenguaje de la lógica proposicional que ya vimos, no es suficiente para representar todo el lenguaje matemático.

Por ejemplo, la sentencia "todos los cuadrados son positivos, 9 es un cuadrado entonces 9 es positivo" no puede ser expresado dentro de la lógica proposicional.

Desde el punto de vista proposicional la sentencia anterior es de la forma $\varphi \wedge \psi \to \sigma$ pero no tenemos en la lógica proposicional forma de expresar "para todo".

Extenderemos el lenguaje en una forma tal que hablaremos de *objetos*, *relaciones* y también introduciremos formas para hablar de todos los objetos en un cierto dominio y para hablar de la existencia de objetos con una cierta propiedad.

Tendremos entonces como expresar sentencias como las que siguen: "Todos los números pares son la suma de dos primos impares",
"Existe un número real cuyo cuadrado es 2".

La experiencia nos ha enseñado que las sentencias matemáticas básicas son de la forma "a tiene la propiedad P" o "a y b están en la relación R", ejemplos son: "n es par", "f es diferenciable", "3=5", "7 < 12", "B está entre A y C".

Por lo tanto construiremos nuestro lenguaje a partir de símbolos para propiedades, relaciones y objetos. Agregaremos variables que varían sobre objetos, funciones de objetos en objetos y los cuantificadores $\forall$ y $\exists$.

En resumen el lenguaje maneja dos categorias de entidades sintácticas: objetos (que llamaremos *términos*) y sentencias (que llamaremos *fórmulas*). Ejemplos de términos son 17, x, $(2+5)$, x^{3y+1}. Ejemplos de fórmula son:

$\exists x P(x)$
$\forall y P(y)$
$x < y \to \exists z(x < z \wedge z < y)$
$\forall x \exists y(x.y = 1)$

Trabajaremos dentro de la *lógica de 1er orden*, esto es, los cuantificadores cuantifican objetos y no propiedades o relaciones.

2 Estructuras

Por ejemplo un conjunto parcialmente ordenado es un conjunto junto con una relación que satisface ciertas leyes. Genralizamos la idea de la siguiente manera:

Definition 2.1 (Estructura) *Una estructura es una secuencia ordenada:*

$$\alpha = (A, R_1, \ldots, R_n, F_1, \ldots, F_m, c_1, \ldots, c_i)$$

donde A es un conjunto no vacio, $R_1, \ldots, R_n$ son relaciones en A, $F_1, \ldots, F_m$ son funciones totales en A, los c_i son elementos de A (constantes).

Ejemplos 2.2

1. $(R, +, ., -, ^{-1}, 0, 1)$ *campo de los reales*
2. $(N, <)$ *conjunto ordenado de los naturales*
3. $(Q, =, <, +, ., ^{-1}, 1/2, 1/5, 0)$ *racionales*

Usaremos letras griegas para denotar estructuras.

Definition 2.3 (Tipo de similaridad de una estructura) *Dada la estructura $\alpha = (A, R_1, \ldots, R_n, F_1, \ldots, F_m, c_1, \ldots, c_i)$ el tipo de similaridad de α es una secuencia: $(r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_m; i)$ donde: $R_j \subseteq A^{r_j}, F_j : A^{a_j} \to A$.*

Ejemplos 2.4

1. $(R, +, ., -, ^{-1}, 0, 1)$ *campo de los reales, tiene tipo de similaridad:* $(-; 2, 2, 1, 1; 2)$ *(la ausencia de relaciones o funciones es indicada con un guión: $-$).*
2. $(N, <)$ *conjunto ordenado de los naturales tiene tipo de similaridad:* $(2; -; 0)$.
3. $(Q, =, <, +, ., ^{-1}, 1/2, 1/5, 0)$ *tiene tipo de similaridad* $(2, 2; 2, 2, 1; 3)$.

Notación: Si $R \subseteq A$ decimos R es una *propiedad* o *relacion unaria*. Si $R \subseteq A^2$ decimos R es una *relacion binaria*. Si $R \subseteq A^n$ decimos R es una *relacion n-aria*.

El conjunto A es llamado el universo de la estructura. Notación $A = |\alpha|$. α es llamada (in)finita si su universo es in(finito).

3 El lenguaje de un tipo de similaridad

Dado el siguiente tipo de similaridad, $(r_1, \ldots, r_n; a_1, \ldots, a_m; i)$, el lenguaje asociado consiste de

Alfabeto:

1. Símbolos de predicado: $P_1, \ldots, P_n$,
2. Símbolos de función: $f_1, \ldots, f_m$,
3. Símbolos de constante: $\overline{c_1}, \ldots, \overline{c_i}$
4. Variables: $x, x_0, x_1, \ldots, y, y_0, y_1, \ldots, z, z_0, z_1, \ldots$ (una cantidad numerable)
5. Conectivos: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \perp, \forall, \exists$
6. Símbolos auxiliares: (,), ”, ”.

$\forall$ y $\exists$ son llamados cuantificadores universal y existencial.

Definition 3.1 (TERM) *Es el menor conjunto X que satisface las siguientes propiedades:*

1. (a) $\overline{c_j} \in X$ *para* $j = 1, \ldots, i$

   (b) $x, y, z, x_i, y_i, z_i \in X (i \in N)$

2. *si* $t_1, \ldots, t_{a_i} \in X \Rightarrow f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}) \in X$ *para* $1 \leq i \leq m$

Definition 3.2 (FORM) *Es el menor conjunto X que satisface las siguientes propiedades:*

1. *Fórmulas atómicas o átomos*

   (a) $\perp \in X$,

   (b) *si* $t_1, \ldots, t_{r_i} \in TERM \Rightarrow P_i(t_1, \ldots, t_{r_i}) \in X$

2. *si* $\varphi, \psi \in X \Rightarrow (\varphi \triangle \psi) \in X$ *donde* $\triangle \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

3. *si* $\varphi \in X \Rightarrow (\neg \varphi) \in X$

4. *si* $\varphi \in X \Rightarrow (\forall x_i)\varphi$ *y* $(\exists x_i)\varphi \in X$

Al igual que en PROP tenemos **principios de inducción** para TERM y FORM.

Lema 3.3 *Sea $A(t)$ una propiedad de los términos. Si:*

1. $A(t)$ *se cumple para t variable o constante y*

2. $A(t_1), A(t_2), \ldots, A(t_{a_i}) \Rightarrow A(f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}))$ *para todos los símbolos de función f_i entonces*

$A(t)$ se cumple para todo $t \in TERM$.

Demostración *Sea* $X = \{t \in TERM / A(t)\}$.

1. *por hipótesis las variables y constantes están en X.*

2. *Si* $t_1, \ldots, t_{a_i} \in X$ *entonces* $A(t_1), \ldots, A(t_{a_i})$, *por hipótesis* $A(f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}))$ *luego* $f_i(t_1, \ldots, t_{a_i}) \in X$

luego X satisface las claususlas de definición de TERM, como TERM es el mínimo conjunto que las satisface $TERM \subseteq X$ luego para todo $t \in TERM$ se cumple $A(t)$.

Lema 3.4 *Sea $A(\varphi)$ una propiedad de las fórmulas. Si :*

1. $A(\varphi)$ *se cumple para φ atómica*

2. $A(\varphi), A(\psi) \Rightarrow A((\varphi \triangle \psi))$ *siendo* $\triangle \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

3. $A(\varphi) \Rightarrow A((\neg \varphi))$

4. $A(\varphi) \Rightarrow A((\forall x_i)\varphi)$ *y* $A(\varphi) \Rightarrow A((\exists x_i)\varphi)$ *para todo i, entonces:*

$A(\varphi)$ se cumple para todo $\varphi \in FORM$.

Demostración. *Queda como ejercicio.*

Precedencia: Asumimos la convención de paréntesis de la lógica proposicional. Quitamos los paréntesis alrededor de $\forall x$ y $\exists x$ cuando no haya ambiguedad. Asumimos que los quantificadores "ligan" mas fuerte que los conectivos binarios. Juntamos cuando se repite un cuantificador por ejemplo en vez de $\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3 \exists x_4 \varphi$ escribimos $\forall x_1 x_2 \exists x_3 x_4 \varphi$. Asumimos también que n en $f(t_1, \ldots, t_n), P(t_1, \ldots, t_n)$ denota el numero correcto de argumentos.

Tenemos también **principios de recursión** para TERM y FORM.

Definition 3.5 (Definición por recursión en TERM) *Sea $H_0 : Var \cup Const \to A$ y $H_i : A^{a_i} \to A$ para cada función f_i entonces existe una única función H tal que*

$$H(t) = H_0(t) \text{ si } t \text{ es variable o constante}$$
$$H(f_i(t_1, \ldots, t_{a_i})) = H_i(H(t_1), \ldots, H(t_{a_i}))$$

Ejemplos 3.6 *1) Defina por recursión una función que cuente la cantidad de 1 de un término.*

Defino H_0 y H_i para cada función f_i.

1. $H_0(x) = 0$
2. $H_0(c) = 0$ *si* $c \neq 1$
3. $H_0(1) = 1$
4. $H_i(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$

2) Defina por recursión una función que cuente la cantidad de "+" de un término.

1. $H_0(t) = 0$
2. $H_i(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$ *si* $f_i \neq +$
3. $H_i(x_1, \ldots, x_n) = 1 + x_1 + \ldots x_n$ *si* $f_i = +$

Definition 3.7 (Definición por recursión en FORM) *Sean:*

$H_{at} : At \to A$ *(H_{at} está definida en átomos)*
$H_\triangle : A^2 \to A$, $\triangle \in \{\vee, \wedge, \to, \leftrightarrow\}$
$H_\neg : A \to A$
$H_\forall : A \times N \to A$
$H_\exists : A \times N \to A$

entonces existe una única función $H : FORM \to A$ tal que

$H(\varphi) = H_{at}(\varphi)$ *para* φ *atómica*
$H(\varphi \triangle \psi) = H_{\triangle}(H(\varphi), H(\psi)),$
$H(\neg\varphi) = H_{\neg}(H(\varphi)),$
$H(\forall x_i \varphi) = H_{\forall}(H(\varphi), i),$
$H(\exists x_i \varphi) = H_{\exists}(H(\varphi), i)$

La justificación es inmediata, el valor en un término (fórmula) está unicamente determinado por el valor en sus partes. Esto permite encontrar el valor de $H(\varphi)$ en cantidad finita de pasos.

Ejemplos 3.8 *1) Defina por recursión una función que cuente la cantidad de* $\wedge$ *de una fórmula.*

1. $H_{at}(\varphi) = 0$
2. $H_{\wedge}(x_1, x_2) = 1 + x_1 + x_2$
3. $H_{\triangle}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *para* $\triangle \in \{\vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
4. $H_{\neg}(x) = x$
5. $H_{\forall}(x, i) = x$
6. $H_{\exists}(x, i) = x$

2) Defina por recursión una función que cuente la cantidad de variables x_i *que aparecen ligadas en una fórmula.*

1. $H_{at}(\varphi) = 0$
2. $H_{\triangle}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ *para* $\triangle \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. $H_{\neg}(x) = x$
4. $H_{\forall}(x, j) = x$ *si* $j \neq i$
5. $H_{\forall}(x, i) = x + 1$
6. $H_{\exists}(x, j) = x$ *si* $j \neq i$
7. $H_{\exists}(x, i) = x + 1$

Definition 3.9 (Variables libres en un término) *El conjunto* $FV(t)$ *de variables libres de* t *se define por:*

1. $FV(x_i) = \{x_i\}$
   $FV(\overline{c_i}) = \{\}$
2. $FV(f(t_1, \ldots, t_n)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_n)$

Definition 3.10 (Variables libres en una fórmula) *El conjunto* $FV(\varphi)$ *de variables libres de* φ *se define por:*

1. $FV(P(t_1, \ldots, t_p)) = FV(t_1) \cup \ldots \cup FV(t_p)$

2. $FV(\varphi \triangle \psi) = FV(\varphi) \cup FV(\psi)$ *para* $\triangle \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
3. $FV(\neg\varphi) = FV(\varphi)$
4. $FV(\forall x_i \varphi) = FV(\exists x_i \varphi) = FV(\varphi) - \{x_i\}$

Definition 3.11 *Término o fórmula cerrada*

t o φ se llaman cerrados *si su conjunto de variables libres es vacio. Llamamos* sentencias *a las fórmulas cerradas. Una fórmula sin cuantificadores se llama* abierta*. Denotamos por $TERM_c$ el conjunto de términos cerrados. Denotamos por $SENT$ el conjunto de sentencias. Las variables que ocurren en cuantificadores se dice que están* ligadas*.*

En algunos casos una variable puede ocurrir tanto libre como ligada. Por ejemplo:

$(\forall x_1(x_1 = x_2)) \rightarrow P(x_1)$

contiene x_1 tanto libre como ligada.

Definition 3.12 (Sustitución en un término) *Sean s y t términos. Definimos la sustitución de x por t en s: $s[t/x]$ como sigue:*

1. $y[t/x] = y$ *si* $y \neq x$
   $y[t/x] = t$ *si* $y = x$
   $c[t/x] = c$
2. $f(t_1, \dots, t_p)[t/x] = f(t_1[t/x], \dots, t_p[t/x])$

Definition 3.13 (Sustitución en una fórmula) *Sean t término, φ fórmula. Definimos la sustitución de x por t en φ: $\varphi[t/x]$ como sigue:*

1. $\perp [t/x] = \perp$
   $P(t_1, \dots, t_p)[t/x] = P(t_1[t/x], \dots, t_p[t/x])$
2. $(\varphi \triangle \psi)[t/x] = \varphi[t/x] \triangle \psi[t/x]$
   $(\neg\varphi)[t/x] = \neg(\varphi[t/x])$
3. $(\forall y \varphi)[t/x] = \forall y(\varphi[t/x])$ *si* $x \neq y$
   $(\forall y \varphi)[t/x] = \forall y \varphi$ *si* $x = y$
   $(\exists y \varphi)[t/x] = \exists y(\varphi[t/x])$ *si* $x \neq y$
   $(\exists y \varphi)[t/x] = \exists y \varphi$ *si* $x = y$

Algunas veces haremos sustituciones simultaneas*. La idea es que sustituimos todas las variables al mismo tiempo. La denotamos por : $t[t_1, \dots, t_n/y_1, \dots, y_n]$*

Ejemplos 3.14 (Sustituciones)

$(x_0 = x_1)[x_1/x_0][x_0/x_1] = (x_1 = x_1)[x_0/x_1] = (x_0 = x_0)$

$(x_0 = x_1)[x_1, x_0/x_0, x_1] = (x_1 = x_0)$

La definición de sustitución en el caso de cuantificadores no permite sustituir variables ligadas. Existe sin embargo otro caso en el cual no podemos permitir la sustitución, esto es cuando una variable luego de la sustitución queda ligada:

por ejemplo: $\exists x(y < x)[x/y] = \exists x(x < x)$

Para evitar estos casos introducimos la siguiente definición:

Definition 3.15 (t libre para x en φ) *Se cumple en los siguientes casos:*

1. *φ atómica*
2. *$\varphi = \varphi_1 \triangle \varphi_2$ (o $\varphi = \neg\varphi_1$) y t es libre para x en φ_1 y φ_2 (respectivamente φ_1) $\triangle \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*
3. *$\varphi = \exists y\psi$ o $\varphi = \forall y\psi$ y $x \notin FV(\forall y\psi)$ o $y \notin FV(t)$ y t es libre para x en ψ.*

Ejemplos 3.16
1. *x_2 es libre para x_0 en $\exists x_3 P(x_0, x_3)$*
2. *$f(x_0, x_1)$ no es libre para x_0 en $\exists x_1 P(x_0, x_3)$*
3. *x_5 es libre para x_1 en $P(x_1, x_3) \rightarrow \exists x_1 Q(x_1, x_2)$*

De ahora en más asumiremos que todas nuestras sustituciones satisfacen la definicion anterior.

Definition 3.17 (Lenguaje extendido) *El lenguaje extendido $L(\alpha)$ de α se obtiene de L de tipo α agregando símbolos constantes para todos los elementos de $|\alpha|$. Si $a \in |\alpha|$ escribimos el símbolo como $\overline{a}$.*

4 Semántica

La interpretación de sentencias presupone una separación entre el lenguaje y un universo de entidades. Los objetos del lenguaje son tiras de símbolos, las entidades son objetos matemáticos como por ejemplo números, conjuntos, funciones,etc. La idea es interpretar asociando a los símbolos entidades matemáticas.

Consideremos la estructura : $\alpha = (Z, <, +, -, 0)$ (grupo ordenado de enteros). Consideremos como alfabeto:

símbolos de predicados: L
símbolos de función: P, M
símbolo constante: $\overline{0}$

$L(\alpha)$ tiene además símbolos constantes $\overline{m}$ para todo m en Z.

Interpretemos primero los terminos cerrados de $L(\alpha)$, la interpretación t^α de un término t es un elemento de Z.

t	t^α
$\overline{m}$	m
$P(t_1, t_2)$	$t_1^\alpha + t_2^\alpha$
$M(t)$	$-t^\alpha$

A continuación interpretemos *sentencias* de $L(\alpha)$ asignando uno de los valores de verdad 0 o 1. En lo que respecta a conectivos proposicionales la semántica es la vista en lógica proposicional.

$v(\perp) = 0$
$v(L(t,s))$ =1 si $t^\alpha < s^\alpha$
0 en otro caso
$v(\varphi \triangle \psi)$ como en logica proposicional
$v(\neg\varphi)$ como en logica proposicional
$v(\forall x\varphi) = min\{v(\varphi[\overline{n}/x])/n \in Z\}$
$v(\exists x\varphi) = max\{v(\varphi[\overline{n}/x])/n \in Z\}$

Observar que $\forall$ es como una generalización del $\wedge$ y $\exists$ es como una generalización del $\vee$. Observar también que v queda completamente determinada por α.

Ejemplos 4.1

1. $(P(P(\overline{2},\overline{3}),M(\overline{7})))^\alpha =$
$= P(\overline{2},\overline{3})^\alpha + M(\overline{7})^\alpha =$
$= (\overline{2}^\alpha + \overline{3}^\alpha) + (-\overline{7})^\alpha =$
$= 2 + 3 + (-7) = -2$

2. $v(\overline{2} < \overline{-1}) = 0$ *porque* $2 \not< -1$

3. $v(\forall x\exists y(L(x,y))) = min_n(max_m v(L(\overline{n},\overline{m})))$

   $v(L(\overline{n},\overline{m})) = 1$ *si* $m > n$ *luego dado* n *existe* m *tal que* $max_m v(L(\overline{n},\overline{m})) = 1$ *y por lo tanto*

   $min_n(max_m v(L(\overline{n},\overline{m}))) = 1$

Veamos una definición de **interpretación** para el caso general. Sea $\alpha = (A, R_1, \ldots, R_n, F_1, \ldots, F_m, c_1, \ldots, c_i)$ con tipo de similaridad $(r_1, \ldots, r_n, a_1, \ldots, a_m, i)$.
El lenguaje tiene símbolos de predicado $\overline{R}_1, \ldots, \overline{R}_n$, símbolos de función $\overline{F}_1, \ldots, \overline{F}_m$ y símbolos ctes $\overline{c}_k$. Además $L(\alpha)$ tiene constantes $\overline{a}$ para todo $a \in |\alpha|$.

Definition 4.2 (Interpretación de términos cerrados) t^α*, la interpretación de un término cerrado de* $L(\alpha)$ *en* α *es una función de* $TERM_c \to |\alpha|$ *que satisface:*

1. $\overline{c}_i^\alpha = c_i$
$\overline{a}_i^\alpha = a$

2. $(\overline{F}_i(t_1, \ldots, t_p))^\alpha = F_i(t_1^\alpha, \ldots, t_p^\alpha)$

Definition 4.3 (Interpretación de sentencias) *$v^\alpha(\varphi)$, la interpretación de una sentencia de $L(\alpha)$ en α es una función de las sentencias de $L(\alpha)$ a $\{0,1\}$ que satisface:*

1. $v^\alpha(\perp) = 0$

2. $v^\alpha(\overline{P_i}(t_1, \ldots, t_p)) = 1$ *si* $(t_1^\alpha, \ldots, t_p^\alpha) \in P_i$ *0 en otro caso.*

3. $v^\alpha(\varphi \wedge \psi) = min(v^\alpha(\varphi), v^\alpha(\psi))$
   $v^\alpha(\varphi \vee \psi) = max(v^\alpha(\varphi), v^\alpha(\psi))$
   $v^\alpha(\varphi \to \psi) = max(1 - v^\alpha(\varphi), v^\alpha(\psi))$
   $v^\alpha(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 - |v^\alpha(\varphi) - v^\alpha(\psi)|$
   $v^\alpha(\neg\varphi) = 1 - v^\alpha(\varphi)$

4. $v^\alpha(\forall x\varphi) = min\{v^\alpha(\varphi[\overline{a}/x])/a \in |\alpha|\}$
   $v^\alpha(\exists x\varphi) = max\{v^\alpha(\varphi[\overline{a}/x])/a \in |\alpha|\}$

En vez de utilizar la notación de valuación utilizaremos la siguiente:

Definition 4.4 (Notación) *$\alpha \models \varphi$ representa $v^\alpha(\varphi) = 1$.*
Decimos que φ es verdadera o válida en α si $\alpha \models \varphi$.
La relación $\models$ es llamada también **relación de satisfacción**.

Definition 4.5 *Sea $FV(\varphi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$, entonces $Cl(\varphi) = \forall z_1 z_2 \ldots z_k \varphi$ es la clausura universal de φ.*

Definition 4.6

1. *$\alpha \models \varphi$ para φ abierta si y solo si $\alpha \models Cl(\varphi)$*

2. *$\models \varphi$ si y solo si $\alpha \models \varphi$ para todo α (del tipo apropiado)*

3. *$\Gamma \models \varphi$ si y solo si (($\alpha \models \psi$ para todo $\psi \in \Gamma$) $\Rightarrow \alpha \models \varphi$) donde $\Gamma \cup \{\varphi\}$ consiste de sentencias.*

Si $\alpha \models \sigma$ decimos α es modelo de σ.
Decimos φ es verdadera si $\models \varphi$.
Decimos φ es consecuencia semántica de Γ si $\Gamma \models \varphi$ es decir φ se satisface en cada modelo de Γ.

Si φ es una fórmula con variables libres $FV(\varphi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$ entonces decimos que φ es satisfecha por $a_1, \ldots, a_k \in |\alpha|$ si $\alpha \models \varphi[\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_k/\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_k]$.

φ es llamada satisfacible *en α si existen $a_1, \ldots, a_k$ tal que φ satisfecha por $a_1, \ldots, a_k$.*

φ es llamada satisfacible *si es satisfacible en algún α. Notar que φ es satisfacible en α si $\alpha \models \exists z_1 \ldots z_k \varphi$.*

La relación de satisfacción se corresponde con el significado intuitivo de los conectivos:

Lema 4.7 *Si nos restringimos a sentencias entonces:*

1. $\alpha \models \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow \alpha \models \varphi$ *y* $\alpha \models \psi$

2. $\alpha \models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow \alpha \models \varphi$ *o* $\alpha \models \psi$

3. $\alpha \models \neg\alpha \Leftrightarrow \alpha \not\models \varphi$

4. $\alpha \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow (\alpha \models \varphi \Rightarrow \alpha \models \psi)$

5. $\alpha \models \varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\alpha \models \varphi \Leftrightarrow \alpha \models \psi)$

6. $\alpha \models \forall x\varphi \Leftrightarrow \alpha \models \varphi[\overline{a}/x]$ *para todo* $a \in |\alpha|$

7. $\alpha \models \exists x\varphi \Leftrightarrow \alpha \models \varphi[\overline{a}/x]$ *para algún* $a \in |\alpha|$

Demostración. *Se sigue de la definición de valuación, veremos dos casos:* *(4)*

$\alpha \models \varphi \to \psi \Leftrightarrow v^{\alpha}(\varphi \to \psi) = max(1 - v^{\alpha}(\varphi), v^{\alpha}(\psi)) = 1.$
Supongamos $\alpha \models \varphi$ *es decir* $v^{\alpha}(\varphi) = 1$ *entonces debe ser* $v^{\alpha}(\psi) = 1$ *o sea* $\alpha \models \psi$.

Reciprocamente supongamos $\alpha \models \varphi \Rightarrow \alpha \models \psi$ *y supongamos* $\alpha \not\models \varphi \to \psi$ *entonces* $v^{\alpha}(\varphi \to \psi) = max(1 - v^{\alpha}(\varphi), v^{\alpha}(\psi)) = 0$ *entonces* $v^{\alpha}(\psi) = 0$ *y* $v^{\alpha}(\varphi) = 1$ *lo que contradice* $\alpha \models \varphi \Rightarrow \alpha \models \psi$.

(7)

$\alpha \models \exists x\varphi(x) \Leftrightarrow max\{v^{\alpha}(\varphi(\overline{a}))/a \in |\alpha|\} = 1 \Leftrightarrow$ *existe un* $a \in |\alpha|$ *tal que* $\alpha \models \varphi(\overline{a})$.

5 Propiedades simples de la lógica de predicados

Teorema 5.1 (Generalización de De Morgan)

1. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$

2. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$

3. $\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$

4. $\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$

Prueba de 1:

Sean $FV(\forall x\varphi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. *Debemos demostrar* $\alpha \models \forall z_1, \ldots, z_k(\neg\forall x\varphi(x, z_1, \ldots, z_k) \leftrightarrow \exists x\neg(\varphi(x, z_1, \ldots, z_k))$ *para todo* α. *Entonces tenemos que demostrar* $\alpha \models \neg\forall(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \leftrightarrow \exists x\neg\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *para arbitrarios* $a_1, \ldots, a_k \in |\alpha|$. *Apliquemos el lema 4.7.*

$\alpha \models \neg\forall x\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow \alpha \not\models \forall x\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *no para todo* $b \in |\alpha|, \alpha \models \varphi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
existe un $b \in |\alpha|$ *tal que* $\alpha \not\models \varphi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *existe un* $b \in |\alpha|$ *tal que* $\alpha \models \neg\varphi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow \alpha \models \exists x\neg\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$

Prueba de 2: *Similar*

Prueba de 3:

Primero veamos que $\neg\neg\alpha$ es equivalente a α. Utilizemos la definición de valuación:

$v(\neg\neg\alpha) = 1 - v(\neg\alpha) = 1 - (1 - v(\alpha)) = v(\alpha)$

Luego veamos que $\alpha \to \beta$ es equivalente a $\neg\beta \to \neg\alpha$. Utilizemos la definición de valuación:

$v(\alpha \to \beta) = max(1 - v(\alpha), v(\beta))$
$v(\neg\beta \to \neg\alpha) = max(1 - v(\neg\beta), v(\neg\alpha)) = max(1 - (1 - v(\beta)), 1 - v(\alpha)) = max(1 - v(\alpha), v(\beta))$

Apliquemos las equivalencias anteriores a 1) para probar 3), obtenemos que

$\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$ *es equivalente a*
$\neg\exists x\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\forall x\varphi$ *que es equivalente a*
$\neg\exists x\neg\varphi \leftrightarrow \forall x\varphi$

De igual manera se prueba 4) a partir de 2).

Teorema 5.2

1. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$
2. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$
3. $\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ *si* $x \notin FV(\varphi)$
4. $\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$ *si* $x \notin FV(\varphi)$

Prueba de 1:

Sean $FV(\forall x\forall y\varphi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. Debemos demostrar $\alpha \models \forall z_1, \ldots, z_k(\forall x\forall y\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_k) \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_k))$ para todo α. Entonces tenemos que demostrar $\alpha \models \forall x\forall y\varphi(x, y, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi(x, y, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ para arbitrarios $a_1, \ldots, a_k \in |\alpha|$. Apliquemos el lema 4.7.

$\alpha \models \forall x\forall y\varphi(x, y, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *para todo* $b \in |\alpha|, \alpha \models \forall y\varphi(b, y, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *para todo* $b, c \in |\alpha|, \alpha \models \varphi(b, c, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
para todo $c \in |\alpha|, \alpha \models \forall x\varphi(c, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow \alpha \models \forall y\forall x\varphi(x, y, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$

Prueba de 2: *Similar.*

Prueba de 3: *Similar a la de 4 (ver abajo)*

Prueba de 4:

Sean $FV(\exists x\varphi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. *Debemos demostrar* $\alpha \models \forall z_1, \ldots, z_k(\exists x\varphi(z_1, \ldots, z_k) \leftrightarrow \varphi(z_1, \ldots, z_k))$ *para todo* α. *Entonces tenemos que demostrar* $\alpha \models \exists x\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \leftrightarrow \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *para arbitrarios* $a_1, \ldots, a_k \in |\alpha|$. *Apliquemos el lema 4.7.*

$\alpha \models \exists x\varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *para algun* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *como* b *no ocurre en* φ, $\alpha \models \varphi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$

Teorema 5.3 *1.* $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi \wedge \forall x\psi$

2. $\exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi \vee \exists x\psi$

3. $\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \vee \psi$ *si* $x \notin FV(\psi)$

4. $\exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \leftrightarrow \exists x\varphi(x) \wedge \psi$ *si* $x \notin FV(\psi)$

Prueba de 1:

Sean $FV(\forall x\varphi \wedge \psi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. *Debemos demostrar* $\alpha \models \forall z_1, \ldots, z_k(\forall x\varphi(x, z_1, \ldots, z_k) \wedge \psi(x, z_1, \ldots, z_k)) \leftrightarrow \forall x\varphi(x, z_1, \ldots, z_k)) \wedge \forall x\psi(x, z_1, \ldots, z_k)$ *para todo* α. *Entonces tenemos que demostrar* $\alpha \models \forall x(\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \wedge \psi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})) \leftrightarrow \forall x\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \wedge \forall x\psi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *para arbitrarios* $a_1, \ldots, a_k \in |\alpha|$. *Apliquemos el lema 4.7.*

$\alpha \models \forall x(\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \wedge \psi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}))$
$\Leftrightarrow$ *para todo* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \varphi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \wedge \psi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *para todo* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \varphi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *y* $\alpha \models \psi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ *para todo* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \varphi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *y para todo* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \psi(b, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$
$\Leftrightarrow$ $\alpha \models \forall x\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *y* $\alpha \models \forall x\psi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$

Prueba de 2: *Similar a 1*

Prueba de 3:

Sean $FV(\forall x(\varphi(x) \vee \psi) = \{z_1, \ldots, z_k\}$. *Debemos demostrar* $\alpha \models \forall z_1, \ldots, z_k(\forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow \forall x\varphi(x) \vee \psi$ *para todo* α. *Entonces tenemos que demostrar usando lema* **??** *que* $\alpha \models \forall x(\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k}) \vee \psi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})) \Leftrightarrow \alpha \models \forall x(\varphi(x, \overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})) \vee \psi(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_k})$ *para toda* α *y para todo* $a_1, \ldots, a_k \in |\alpha|$.

$\Leftarrow$: $\alpha \models \forall x\varphi(x, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_) \Leftrightarrow \alpha \models \forall x\varphi(x, \_\_\_)$ *or* $\alpha \models \psi(\_\_\_)$ *para todo* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_)$ *o* $\alpha \models \psi(\_\_\_)$.

Si $\alpha \models \psi(\_\_\_)$, *entonces también* $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_)$ *para todo* b, *entonces* $\alpha \models \forall x\varphi(x, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_))$.

Si $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_)$, *para todo* b *entonces* $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_)$ *para todo* b, *entonces* $\alpha \models \forall x(\varphi(x, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_)$.

En ambos casos obtenemos el resultado deseado.
$\Rightarrow$: *Sabemos que para todo* $b \in |\alpha|$ $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_)$.

Si $\alpha \models \psi(\_\_\_)$, *entonces también* $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_)$ *para todo* b, *entonces* $\alpha \models \forall x(\varphi(x, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_))$ *con lo cual queda probado.*

Si $\alpha \not\models \psi(\_\_\_)$ *entonces necesariamente* $\alpha \models \varphi(b, \_\_\_)$ *para todo* b, *luego* $\alpha \models \forall x \varphi(x, \_\_\_)$ *luego,* $\alpha \models \forall x \varphi(x, \_\_\_) \vee \psi(\_\_\_)$.

Prueba de 4: *es similar a la de 3.*

Observación.

$\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow \forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)$ y
$\exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \wedge \psi(x))$
no son ciertas.

Teorema 5.4 (Cambio de variable ligada) *Si* z *no ocurre en* φ, *entonces:*

1. $\models \exists x \varphi(x) \leftrightarrow \exists z \varphi(z)$
2. $\models \forall x \varphi(x) \leftrightarrow \forall z \varphi(z)$

Otra formulación del mismo teorema es :

1. $\models \exists x \varphi[x/y] \leftrightarrow \exists z \varphi[z/y]$
2. $\models \forall x \varphi[x/y] \leftrightarrow \forall z \varphi[z/y]$

donde $x, z \notin FV(\varphi)$

Para probar este teorema necesitamos el siguiente lemma en sustituciones:

Lema 5.5 1. *Si* $z \notin FV(t)$ *entonces* $t[\overline{a}/x] = (t[z/x])[\overline{a}/z]$

2. *Si* z *no ocurre en* φ, *entonces* $\varphi[\overline{a}/x] = (\varphi[z/x])[\overline{a}/z]$

Demostración.

1. *Inducción en* t.
   (a) $t = x$. $x[\overline{a}/x] = \overline{a}$
   $(x[z/x])[\overline{a}/z] = z[\overline{a}/z] = \overline{a}$

   (b) $t = y \neq x$. $y[\overline{a}/x] = y$
   $(y[z/x])[\overline{a}/z] = y[\overline{a}/z] = y$ *porque* $z \notin FV(t)$ *luego* $z \neq y$

(c) $t = c, c$ *constante.* $c[\overline{a}/x] = c$
$(c[z/x])[\overline{a}/z] = c[\overline{a}/z] = c$

(d) $t = f(t_1, \ldots, t_n)$.

$f(t_1, \ldots, t_n)[\overline{a}/x] =$
$f(t_1[\overline{a}/x], \ldots, t_n[\overline{a}/x]) =$ *por hipotesis inductiva*
$f(t_1[z/x][\overline{a}/z], \ldots, t_n[z/x][\overline{a}/z]) =$
$f(t_1, \ldots, t_n)[z/x][\overline{a}/z]$

2. *Inducción en* φ.

(a) φ *atómica.*

i. $\varphi = \perp$. $\perp [\overline{a}/x] = \perp$
$\perp [z/x][\overline{a}/z] = \perp [\overline{a}/z] = \perp$

ii. $\varphi = P(t_1, \ldots, t_n)$.

$$\begin{aligned} P(t_1, \ldots, t_n)[\overline{a}/x] &= P(t_1[\overline{a}/x], \ldots, t_n[\overline{a}/x]) \text{ por parte 1)} \\ &= P(t_1[z/x][\overline{a}/z], \ldots, t_n[z/x][\overline{a}/z]) = \\ &= P(t_1, \ldots, t_n)[z/x][\overline{a}/z] \end{aligned}$$

(b) φ *no atómica.*

i. $\varphi = \varphi_1 \triangle \varphi_2$, *donde* $\triangle \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$
$(\varphi_1 \triangle \varphi_2)[\overline{a}/x] =$
$(\varphi_1[\overline{a}/x] \triangle \varphi_2[\overline{a}/x]) =$
$(\varphi_1[z/x][\overline{a}/z] \triangle \varphi_2[z/x][\overline{a}/z])$ *por hipotesis inductiva*
$(\varphi_1 \triangle \varphi_2)[z/x][\overline{a}/z]$

ii. $\varphi = \neg\varphi_1$
$(\neg\varphi_1)[\overline{a}/x] =$
$\neg(\varphi_1[\overline{a}/x]) =$
$= (\neg(\varphi_1[z/x][\overline{a}/z]))$ *por hipotesis inductiva*
$= (\neg\varphi_1)[z/x][\overline{a}/z]$

iii. $\varphi = \forall y \psi(y)$. *Tenemos que considerar los siguientes dos casos:*

A. $x = y$. *Entonces* $\varphi[\overline{a}/x] = \varphi$ *y* $\varphi[z/x] = \varphi$. *Como* z *no ocurre en* φ $\varphi[\overline{a}/z] = \varphi$. *Esto prueba el primer caso.*

B. $x \neq y$. *entonces* $\varphi[\overline{a}/x] = \forall y(\psi[\overline{a}/x])$ *y* $(\varphi[z/x])[\overline{a}/z] = \forall y(\psi[z/x])[\overline{a}/z]$. *Como* z *no ocurre en* φ, $z \neq y$ *luego* $\forall y(\psi[z/x])[\overline{a}/z] = \forall y((\psi[z/x])[\overline{a}/z]) = \forall y \psi[\overline{a}/x]$ *por la hipótesis inductiva.*

iv. $\varphi = \exists y \psi(y)$ *es similar.*

Demostración del teorema

No es una restricción suponer $FV(\varphi) = \{x\}$ porque en la presencia de más variables introducimos constantes en el lenguaje extendido.

Veremos que $\alpha \models \exists x \varphi \Leftrightarrow \alpha \models \exists z \varphi[z/x]$.

$\alpha \models \exists x\varphi(x)$
$\Leftrightarrow \alpha \models \varphi[\overline{a}/x]$ para algun $a \in |\alpha|$,
$\Leftrightarrow \alpha \models (\varphi[z/x])[\overline{a}/z]$ para algun $a \in |\alpha|$, por lema anterior
$\Leftrightarrow \alpha \models \exists z\varphi[z/x]$

La prueba para el cuantificador $\forall$ es similar.

Teorema 5.6 (Teorema de la Sustitución) *1.* $\models t_1 = t_2 \rightarrow s[t_1/x] = s[t_2/x]$

2. $\models t = s \rightarrow (\varphi[t/x] \leftrightarrow \varphi[s/x])$ *donde t y s están libres para x en φ.*

Demostración.

1. *Sea dada α tal que $\alpha \models t_1 = t_2$. Entonces $t_1^\alpha = t_2^\alpha$. Tenemos que demostrar $\alpha \models s[t_1/x] = s[t_2/x]$ o sea $s[t_1/x]^\alpha = s[t_2/x]^\alpha$. Usemos inducción en s.*

   (a) $s = x$. $x[t_1/x] = t_1$, $x[t_2/x] = t_2$ *que se cumple pues* $\alpha \models t_1 = t_2$.

   (b) $s = y \neq x$. $y[t_1/x] = y[t_2/x] = y$, *que se cumple pues* $\alpha \models y = y$ *(es un axioma de la igualdad).*

   (c) $s = c$ *c constante.* $c[t_1/x] = c[t_2/x] = c$, *que se cumple pues* $\alpha \models c = c$.

   (d) $s = \overline{f}(s_1, \ldots, s_n)$

   $$\begin{aligned}(\overline{f}(s_1,\ldots,s_n))[t_1/x]^\alpha &= f(s_1[t_1/x]^\alpha,\ldots,s_n[t_1/x]^\alpha)\\ &= f(s_1[t_2/x]^\alpha,\ldots,s_n[t_2/x]^\alpha) \text{ por hipotesis inductiva}\\ &= (\overline{f}(s_1,\ldots,s_n))[t_2/x]\end{aligned}$$

2. *Sea $t^\alpha = s^\alpha$. Probaremos $\alpha \models \varphi[t/x] \Leftrightarrow \alpha \models \varphi[s/x]$ por inducción en φ. O sea $\varphi[t/x]^\alpha \Leftrightarrow \varphi[s/x]^\alpha$.*

   (a) φ *atómica.*

      i. $\varphi = \perp$. $\perp [t/x] \Leftrightarrow \perp [s/x] \Leftrightarrow \perp$.

      ii. $\varphi = \overline{P}(t_1, \ldots, t_n)$.
      $(\overline{P}(t_1,\ldots,t_n)[t/x])^\alpha$
      $\Leftrightarrow (t_1[t/x]^\alpha,\ldots,t_n[t/x]^\alpha) \in P$
      $\Leftrightarrow (t_1[s/x]^\alpha,\ldots,t_n[s/x]^\alpha) \in P$ *por parte anterior*
      $\Leftrightarrow (\overline{P}(t_1,\ldots,t_n)[s/x])^\alpha$

   (b) $\varphi = \varphi_1 \triangle \varphi_2$

   $\alpha \models (\varphi_1 \triangle \varphi_2)[t/x] \Leftrightarrow$
   $\alpha \models \varphi_1[t/x] \triangle \varphi_2[t/x] \Leftrightarrow$
   $\alpha \models \varphi_1[s/x] \triangle \varphi_2[s/x]$ *por hipotesis inductiva* $\Leftrightarrow$
   $\alpha \models (\varphi_1 \triangle \varphi_2)[s/x]$

(c) $\varphi = \neg\varphi_1$

$\alpha \models (\neg\varphi_1)[t/x] \Leftrightarrow$
$\alpha \models \neg(\varphi_1[t/x]) \Leftrightarrow$
$\alpha \models \neg(\varphi_1[s/x])$ *por hipotesis inductiva* $\Leftrightarrow$
$\alpha \models (\neg\varphi_1)[s/x]$

(d) $\varphi = \forall y\psi(y)$. *Es suficiente con considerar el caso en que* $x \in FV(\psi)$.

$\alpha \models (\forall y\psi(y))[t/x] \Leftrightarrow$
$\alpha \models \forall y(\psi(y)[t/x]) \Leftrightarrow$
$\alpha \models \psi(\overline{a})[t/x]$ *para todo* $a \in |\alpha|$ *por induccion hipotesis y como* t *y* s *son libres para* x *en* $\varphi(\overline{a})$
$\alpha \models \psi(\overline{a})[s/x]$ *para todo* $a \in |\alpha| \quad \Leftrightarrow$
$\alpha \models (\forall y\psi(y))[s/x]$

(e) $\varphi = \exists y\psi(y)$ *es similar.*

6 Deducción Natural

Agregaremos a las reglas vistas para el cálculo proposicional las siguientes:

$$\frac{\varphi(x)}{\forall x\varphi(x)}\ \forall I$$

$$\frac{\forall x\varphi(x)}{\varphi(t)}\ \forall E$$

En la regla $\forall I$ la variable x no puede ocurrir libre en ninguna de las hipótesis de las cuales depende la derivación de $\varphi(x)$.

En $\forall E$ requerimos que t este libre para x.

$$\frac{\varphi[t/x]}{\exists x\varphi(x)}\ \exists I$$

$$\frac{\exists x\varphi(x) \qquad \begin{array}{c} \cancel{\varphi(x)} \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\psi}\ \exists E$$

Las condiciones son: en $\exists E$, x no ocurre libre en ψ ni en ninguna hipótesis de la subderivación de ψ distinta de $\varphi(x)$. En $\exists I$ t debe ser libre para x en φ.

Se puede probar que x es libre para x en φ para cualqiuer fórmula φ. Entonces utilizaremos las reglas $\forall E$ y $\exists I$ del siguiente modo:

$$\frac{\forall x\varphi(x)}{\varphi(x)}\ \forall E$$

$$\frac{\varphi(x)}{\exists x\varphi(x)}\ \exists I$$