Matemática Discreta y Lógica 2

Conceptos básicos de la Teoría de Grafos

1. Definiciones

A menudo, cuando se utiliza un mapa de carreteras interesa observar como ir de un pueblo a otro por las carreteras indicadas en el mismo. En consecuencia se tienen dos conjuntos distintos de objetos: pueblos y carreteras. Como ya se ha visto, estos conjuntod de objetos se pueden utilizar para definir una relación. Si V denota el conjunto de pueblos y A el conjunto de carreteras, se puede definir una relación R en V por aRb si existe una carretera que una a con b y tal que $(a, b) \in A$ si aRb. Si son carreteras de doble sentido y existe aRb se tiene también bRa. Si todas las carreteras consideradas son de doble sentido se tiene una relación simétrica.

Definición 1.1 *Sea V un conjunto no vacio y $A \subseteq V \times V$. Entonces el par (V, A) se denomina* grafo dirigido (en V) *o* digrafo (en V) *donde V se llama conjunto de vértices o nodos y A conjunto de aristas. Escribimos $G = (V, A)$.*

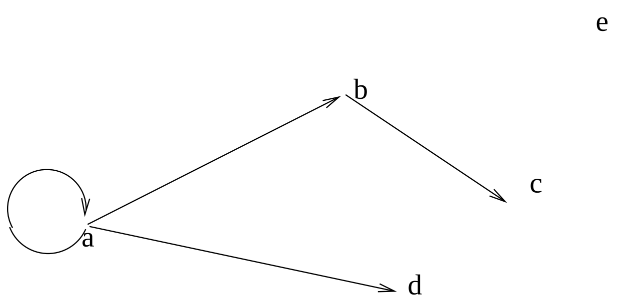

Figura 1:

Dibujamos el grafo colocando los vértices y lineas con flechas por las aristas.

La dirección de la arista (a, b) se indica colocando una flecha en el extremo b. Para cualquier arista, por ejemplo (b, c), se dice que la arista es incidente con los vértices b, c; b **es adyacente a** c mientras que c **es adyacente desde** b. Además b se denomina *origen o fuente de la arista* y c el *término o vértice final*. Una arista (a, a) se denomina *lazo*. Un vértice que no tiene ninguna arista incidente se denomina *vértice aislado*.

Cuando no importa la dirección de las aristas el grafo se denomina *no dirigido*. En un grafo no dirigido hay aristas no dirigidas. Se dibuja igual sin poner la flecha en la arista. En vez de denotar la arista con (a, b) utilizamos conjuntos y denotamos la arista con $\{a, b\}$.

En general cuando no se especifica si un grafo G es o no dirigido se supone que es no dirigido. Si no contiene lazos se denomina *grafo sin lazos*.

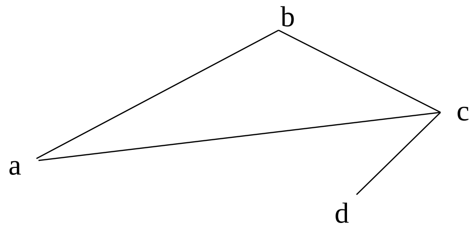

Figura 2:

Decimos que b y c son adyacentes si hay arista {b,c}.

Definición 1.2 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. Para $x, y \in V$ se dice que hay un* camino *en G de x a y si existe una sucesión no vacia finita de aristas distintas de A como $\{x, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, y\}$. Cuando $x = y$ el camino se denomina* ciclo. *El número de aristas de un camino (ciclo) se denomina* longitud *del camino (ciclo).*

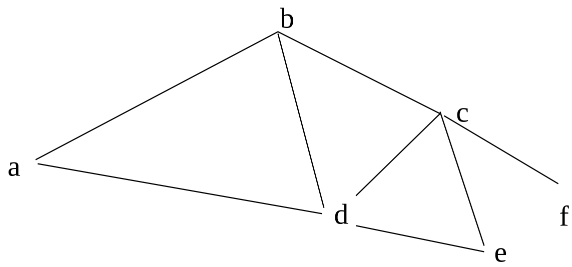

Figura 3:

Cuando un camino entre dos vértices solo pasa una vez por cualquiera de ellos el camino se denomina *simple*. Idem los ciclos.

Para un grafo dirigido se utilizan los términos *caminos dirigidos* y *ciclos dirigidos*.

Definición 1.3 *Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. G se denomina* conexo *si existe un camino entre cualesquiera dos vértices distintos de G.*

Sea $G = (V, A)$ un grafo dirigido. Su grafo no dirigido asociado es el obtenido de G ignorando la dirección de las aristas. G se considera conexo si lo es el grafo asociado.

Un grafo que no sea conexo se denomina no conexo.

Un grafo no conexo está compuesto de subpartes que son conexas y que llamamos componentes conexas. *Un grafo es conexo si y solo si tiene una única componente conexa. En la figura 4 tenemos un grafo no conexo con dos componentes.*

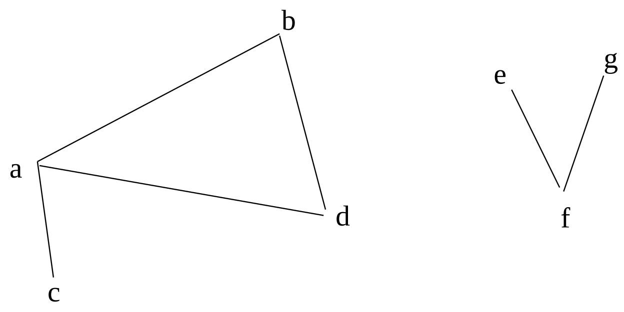

Figura 4:

Teorema 1.4 *Si $G = (V, A)$ es un grafo conexo, entonces existe un camino simple entre dos vértices cualesquiera de G.*

Demostración. Como G es conexo, para cualquier $a, b \in V$ hay un camino de a a b. Consideremos un camino: $\{a, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{n-1}, x_n\}, \{x_n, b\}$. Si este camino no es simple se tiene el caso: $\{a, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\}, \ldots, \{x_{m-1}, x_m\}, \ldots, \{x_n, y\}$ donde $x_k = x_m$, pero entonces $\{a, x_1\}, \{x_1, x_2\}, \ldots, \{x_{k-1}, x_k\}, \{x_m, x_{m+1}\}, \ldots, \{x_n, y\}$ es un camino más corto que repite un vértice menos, repitiendo obtenemos un camino simple.

Definición 1.5 *Un grafo $G = (V, A)$ se denomina* multigrafo *si para $a, b \in V, a \neq b$ has dos o más aristas de la forma (a, b) (para un grafo dirigido) o $\{a, b\}$ (para un grafo no dirigido).*

Si hay k aristas de a a b se dice que la arista $\{a, b\}$ tiene multiplicidad k.

Para $n \in Z^+$ un multigrafo se denomina n-grafo *si ninguna arista del grafo tiene multiplicidad mayor que n.*

2. Subgrafos, Complementos e Isomorfismo de Grafos

Definición 2.1 *Si $G = (V; A)$ es un grafo (dirigido o no dirigido), $G' = (V', A')$ se denomina* subgrafo *de G si $V' \neq \{\}$, $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$ donde cada arista de A' es incidente con vértices de V'.*

La figura 4 presenta un ejemplo de grafo formado por dos subgrafos (no dirigido). La figura 5 presenta un ejemplo de grafo formado por dos subgrafos (dirigido).

La idea de subgrafo ofrece una manera de desarrollar el complemento de un grafo no dirigido. Antes de hacerlo, se define un tipo de grafo de tamaño maximal para un número dado de vértices.

Definición 2.2 *Sea V un conjunto de n vértices. El grafo* completo *en V denotado por K_n es un grafo no dirigido, sin lazos, en el que para cualquier $a, b \in V, a \neq b$ hay una arista $\{a, b\}$.*

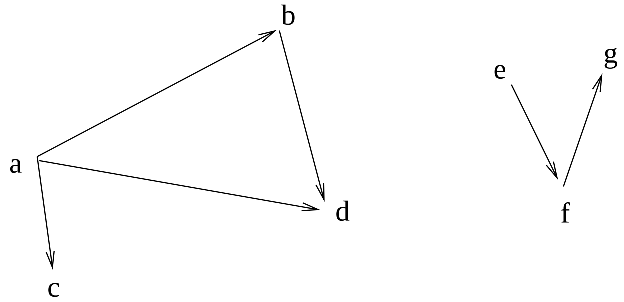

Figura 5:

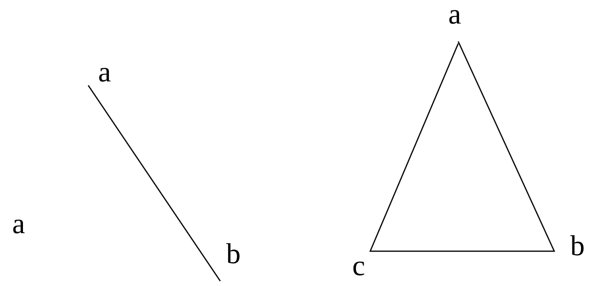

Figura 6:

Las figuras 6 y 7 proporcionan los grafos K_n completos para $1 \leq n \leq 4$. Se observará al analizar la idea de isomorfismo de grafos, que estos son los únicos grafos completos posibles para el número de vértices dados.

Definición 2.3 *Sea G un grafo no dirigido sin lazos de $n-$vertices. El* comple-mento *de G, denotado por $\overline{G}$ es el subgrafo de K_n formado por los n vértices de G y las aristas que no están en G. (Si $G = K_n$, $\overline{G}$ es un grafo formado por n vértices y sin aristas. Este se denomina grafo* nulo.

Definición 2.4 *Sea $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafos no dirigidos. Una función $f : V_1 \to V_2$ se denomina* isomorfismo de grafos *si:*

1. *f es uno-a-uno y sobreyectiva, y*
2. *para todo $a, b \in V_1$, $\{a, b\} \in A_1$ si y solo si $\{f(a), f(b)\} \in A_2$*

Cuando existe dicha función, G_1 y G_2 se denominan grafos isomorfos.

La correspondencia de vértices de un isomórfismo de grafos mantiene las adyacencias, de esta manera se mantiene la estructura de los grafos.

En la figura 8 se muestra un grafo no dirigido de 4 vértices y su complemento. En el complemento, el vértice a está aislado.

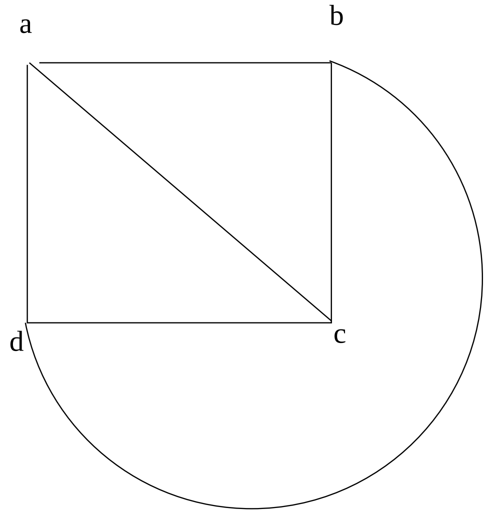

Figura 7:

3. Grado de un vértice: Caminos y Ciclos de Euler

Definición 3.1 *Sea G un grafo o multigrafo no dirigido. Para cualquier vértice v de G, el* grado *de v, esrito $grad(v)$ es el número de aristas de G incidentes con v.*

Teorema 3.2 *Si $G = (V, A)$ es un grafo o multigrafo no dirigido, entonces $\Sigma_{v \in V} grad(v) = 2|A|$.*

Demostración. Según se considera cada arista $\{a, b\}$ del grafo G, la arista suma 1 a $grad(a)$ y a $grad(b)$ y por lo tanto 2 a $\Sigma_{v \in V} grad(v)$. Asi, $2|A|$ es el total de $\Sigma_{v \in V} grad(v)$.

Corolario 3.3 *Para cualquier grafo o multigrafo no dirigido, el número de vértices de grado impar debe ser par.*

Demostración. Supongo el número de vértices de grado impar es impar. $\Sigma_{v \in V} grad(v) = \Sigma_{v \in V, grad(v) par} grad(v) + \Sigma_{v \in V, grad(v) impar} grad(v)$.

El primer término $\Sigma_{v \in V, grad(v) par} grad(v)$ tiene como resultado un número par (la suma de dos pares es par).

El segundo término $\Sigma_{v \in V, grad(v) impar} grad(v)$ es par si el número de vértices de grado impar es par e impar si el número de vértices de grado impar es impar (la suma de dos impares es par, la suma de un número impar de impares es impar).

Definición 3.4 *Un grafo o multigrafo no dirigido donde todos los vértices tienen el mismo grado se denomina* grafo regular*.*

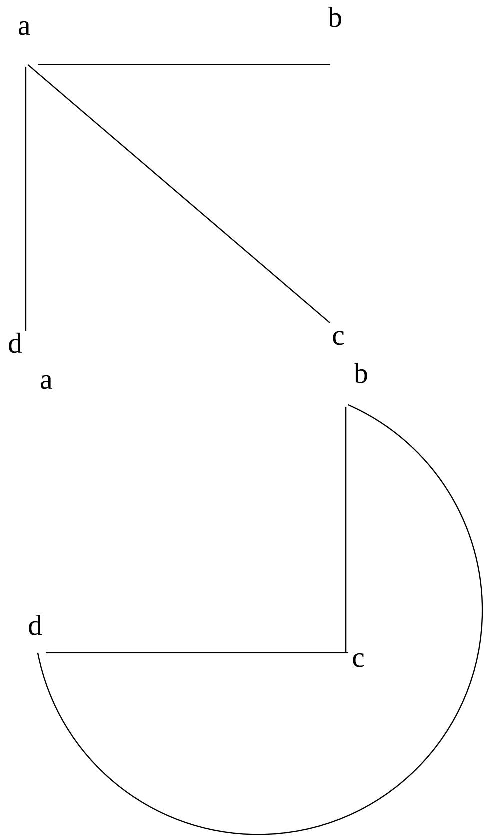

Figura 8:

Definición 3.5 *Sea $G = (V, A)$ un grafo o multigrafo no dirigido. Se dice que G tiene un* ciclo de Euler *si existe un ciclo en G que pase por todo $v \in V$ (una o más veces) y por toda arista del grafo exactamente una vez. Si hay en G un camino de a a b y este pasa por todo vértice (una o más veces) y por cada arista de G exactamente una vez el camino se denomina* camino de Euler.

Teorema 3.6 *Sea $G = (V, A)$ un grafo o multigrafo no dirigido. Entonces G tiene un ciclo de Euler si y solo si G es conexo y todo vértice de G tiene grado par.*

Demostración.Si G tiene un ciclo de Euler, entonces para $a, b \in V$ hay un camino de a a b, la parte del ciclo que comienza en a y termina en b, de ahi que G sea conexo.

Sea c el vértice donde comienza el ciclo de Euler, para cualquier otro vértice v de G, una vez que el ciclo llegue a él, partira de ese vértice.

Asi el ciclo ha pasado por dos aristas incidentes con v o por un lazo (nuevo) en v. En cada caso se añade 2 a $grad(v)$.

Como v no es el vértice inicial se añade 2 cada vez que el ciclo pasa por v de modo que $grad(v)$ es par.

Si consideramos el vértice inicial c, la primera arista debe ser distinta de la última (no se repiten aristas) y para cualquier otra arista que pase por c debe haber una arista distinta adicional que pase por c de donde el grado de c es par.

Reciprocamente, sea G conexo con todos los vértices de grado par. Si el número de aristas de G es 1 o 2 debe ser como el de la figura 9

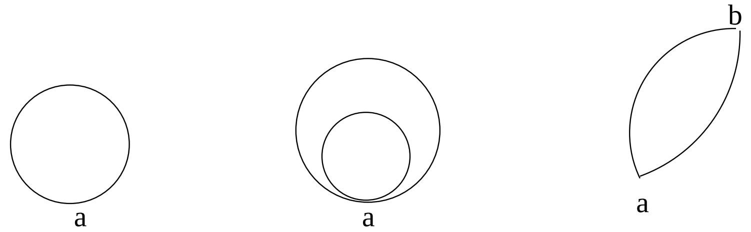

Figura 9:

En estos casos los ciclos de Euler son inmediatos. Prosigamos por inducción, supongamos el resultado es válido si tenemos menos de n aristas.

Si G tiene n aristas seleccionemos un vértice c de G como punto inicial para construir un ciclo de Euler.

Como G es conexo y cada vértice tiene grado par se puede construir al menos un ciclo C en G (si hay un lazo hay un ciclo, si no hay lazos, considero un vértice, no puede estar aislado porque el grafo es conexo, luego hay una arista entre c y otro vertice d. Como d tiene grado par hay arista que sale. Si esta arista va a c construi un ciclo. Sino va a otro vértice e, sigo sucesivamente llendo a otros vértices. Como la cantidad de vértices es finita, en algún momento debo volver a algún vértice por el que pasé antes (como el grado de los vértices es par y no repito aristas, siempre que entro a un vértice salgo por una arista distinta). Luego tengo un ciclo.

Si el ciclo contiene todas las aristas de G se termina.

En otro caso, eliminense las aristas del ciclo de G asegurandose de suprimir los vértices aislados.

El subgrafo restante K tiene todos los vértices de grado par pero puede no ser conexo. Sin embargo cada componente de K es conexa y tiene un ciclo de Euler (hipótesis de inducción, las componentes tienen menos de n aristas).

Además estos ciclos de Euler tienen un vértice en C. Veamos esto. Consideremos la componente C_1 de K. Consideremos un vértice c_1 en C_1. Como G es conexo hay camino entre c_1 y todos los vértices v_i del ciclo C.

Supongamos no hay vértice v_i que pertenezca a C_1. Entonces al eliminar aristas y vértices pertenecientes a C, elimine las aristas que conectaban C_1 y C, luego estas aristas pertenecian al ciclo C y por lo tanto hay un vértice de C_1 que estaba en C.

En consecuencia comenzando en c se recorre C hasta llegar al vértice c_1 que está en el ciclo de Euler de la componente C_1 de K. Se recorre este ciclo de Euler y volviendo a c_1 se continua en C hasta llegar al vértice c_2 de la componente C_2 de K. Como G es finito, según se continua este proceso se construira un ciclo de Euler para G.

Corolario 3.7 *Si G es un grafo o multigrafo no dirigido, se puede construir un camino de Euler de G si y solo si G es conexo y tiene sólo dos vértices de grado impar.*

Demostración. Si G es conexo y a y b son los vértices de G de grado impar, a*ñadase* un vértice $\{a, b\}$ a G y las aristas de este vértice con a y con b. Ahora se tiene un grafo G_1 conexo con todo vértice de grado par. Por ello G_1 tiene un ciclo de Euler C, al eliminar el vértice $\{a, b\}$ de G_1 y las aristas incidentes, se obtiene un camino de Euler para G, asi el camino de Euler comienza en uno de los vértices de grado impar y termina en el otro.

Reciprocamente, supongo G tiene un camino de Euler, luego dados dos vértices a y b cualesquiera hay camino entre a y b de donde G es conexo. Además el camino empieza en un vértice c y termina en otro, supongo el vértice en el que empieza tiene grado par (para simplificar supongamos grado 2), luego comenzando en c debo volver a c (para recorrer todas las aristas adyacentes) y para salir de c debo repetir el recorrido de una de las aristas luego no puede tener grado par (de igual forma se deduce el vertice final tiene grado impar).

4. Caminos y ciclos de Hamilton

Definición 4.1 *Si $G = (V, A)$ es un grafo o multigrafo se dice que G tiene un* ciclo de Hamilton *si existe un ciclo simple de G que contenga todo vértice de V. Un* camino de Hamilton *es un camino simple de G que contiene todos los vértices.*

Dado un grafo con un ciclo de Hamilton, la eliminación de cualquier arista en el ciclo da como resultado un camino de Hamilton. Sin embargo es posible que un grafo tenga un camino de Hamilton sin tener un ciclo de Hamilton.

A diferencia de los ciclos (caminos) de Euler no existen condiciones necesarias y suficientes en un grafo G que garanticen la existencia de un ciclo (camino) de Hamilton.

Ejemplo 4.2 *Si G es el grafo de la figura 10, las aristas $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, f\}, \{f, e\}, \{e, d\}, \{d, g\}, \{g, h\}, \{h, i\}$ generan un camino de Hamilton para G. Sin embargo G no tiene ciclo de Hamilton.*

Como G tiene nueve vértices, si hay un ciclo de Hamilton en G, debe contener nueve aristas. Se comienza en el vértice b y se intenta construir un ciclo de Hamilton. Por la simetría del grafo, no importa si se pasa de b a c o a a. Supongamos pasamos a c. De c se puede pasar a f o a i. Supongamos pasamos a f. Entonces se elimina la arista $\{c, i\}$ pues ya no se puede volver al vértice c. Para incluir el vértice i en el ciclo se debe pasar de f a i y de i a h y luego a g. Con las aristas $\{c, f\}$, $\{f, i\}$ en el ciclo se elimina la arista $\{e, f\}$, pero una vez en e se para, de ahi que no haya un ciclo de Hamilton para el grafo.

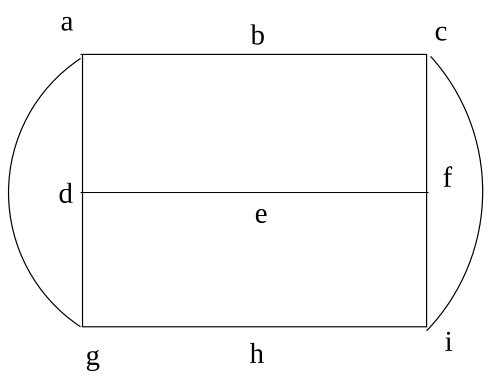

Figura 10:

Sin embargo hay condiciones necesarias o suficientes para esto.
Algunas sugerencias para hallar un ciclo de Hamilton:

1. Si G tiene un ciclo de Hamilton, entonces para $v \in V$, $grad(v) \geq 2$.

2. Si $a \in V$ y $grad(a) = 2$ entonces las dos aristas incidentes con el vértice a deben aparecer en cualquier ciclo de Hamilton de G

3. Si $a \in V$ y $grad(a) > 2$ entonces una vez que se pase por a, las aristas no utilizadas incidentes con a se dejan de tener en cuenta.

Teorema 4.3 *Sea K_n^* un grafo dirigido completo, es decir K_n^* tiene n vértices y para cualquier par de vértices distintos x, y al menos la arista (x, y) o (y, x) está en K_n^*. Dicho grafo siempre contiene un camino de Hamilton.*

Demostración. Sea $m \geq 2$ con t_m un camino simple que contiene las $m-1$ aristas: $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$. Si $m = n$ se ha terminado, en otro caso sea v un vértice que no aparece en t_m.

Si (v, v_1) es una arista de K_n^* se puede ampliar t_m añadiendo esta arista. En otro caso (v_1, v) debe ser una arista. Supóngase ahora que (v, v_2) está en el grafo. Entonces se tiene la trayectoria mayor: $(v_1, v), (v, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{m-1}, v_m)$. Si (v, v_2) no es una arista de K_n^* entonces (v_2, v) debe serlo. Según continua este proceso hay solo dos posibilidades:

1. para $1 \leq k \leq m-1$ las aristas $(v_k, v), (v, v_{k+1})$ están en K_n^* y se sustituye (v_k, v_{k+1}) por este par de aristas, o

2. (v_m, v) está en K_n^* y se añade esta arista a t_m.

En cualquier caso, obtenemos como resultado un camino simple t_{m+1} que incluye $m+1$ vértices y tiene m aristas. Este proceso puede repetirse hasta que se tenga un camino de n vértices.

Teorema 4.4 *Sea $G = (V, A)$ un grafo sin lazos con $|V| = n$. Si $grad(x) + grad(y) \geq n - 1$ para todo $x, y \in V, x \neq y$ entonces G tiene un camino de Hamilton.*

Demostración. Primero se demuestra que G es conexo. En otro caso sean C_1, C_2 dos componentes de G con $x, y \in V, x \in C_1, y \in C_2$. Sea C_i con n_i vértices, i=1,2. Entonces $grad(x) \leq n_1 - 1$ (hay a lo más $n_1 - 1$ aristas ya que hay n_1 vértices, $grad(y) \leq n_2 - 1$ y $grad(x) + grad(y) \leq n_1 + n_2 - 2 \leq n - 2$ que contradice la condición dada en el teorema, en consecuencia G es conexo.

Ahora se construye un camino de Hamilton para G. Para $m \geq 2$, sea T_m el camino $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ de longitud $m - 1$ (si es necesario se etiquetan de nuevo los vértices). Dicho camino existe pues para $m = 2$ lo unico que se necesita es una arista. Si v_1 es adyacente a cualquier vértice v distinto de $v_2, v_3, \ldots, v_m$ se añade la arista $\{v, v_1\}$ a t_m para obtener t_{m+1}. El mismo tipo de procedimiento se lleva a cabo si v_m es adyacente a un vértice distinto de $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{m-1}$. De esta manera, si se puede extender t_m a t_n se obtiene un camino de Hamilton.

En otra situación, el camino t_m:$\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}$ tiene v_1, v_m adyacentes sólo a los vértices de t_m y $m < n$. Cuando esto sucede, se afirma que G contiene un ciclo simple en estos vértices. Si v_1 y v_m son adyacentes, el ciclo es $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{m-1}, v_m\}, \{v_m, v_1\}$. Si v_1 y v_m no son adyacentes entonces v_1 es adyacente a un subconjunto S de los vértices de $\{v_2, v_3, \ldots, v_{m-1}\}$. Si hay un vértice $v_t \in S$ tal que v_m es adyacente a v_{t-1} entonces se puede obtener el ciclo añadiendo $\{v_1, v_t$, $\{v_{t-1}, v_m\}$ y eliminando $\{v_{t-1}, v_t\}$ como se muestra en la figura 11:

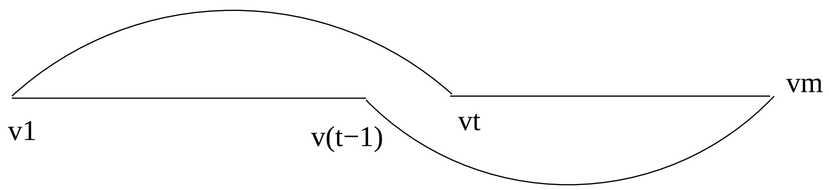

Figura 11:

En otro caso, sea $|S| = k < m - 1$. Entonces $grad(v_1) = k$ y $grad(v_m) \leq (m - 1) - k$ (v_m no es adyacente a v_i para $v_{i+1} \in S$) y se tiene la contradicción $grad(v_1) + grad(v_m) \leq m - 1 < n - 1$. De ahi que haya un ciclo simple que conecte $v_1, v_2, \ldots, v_m$.

Se considera ahora un vértice $v \in V$ que no se halle en este ciclo. Como G es conexo, hay un camino de v al primer vértice v_r del ciclo, como en la figura 12

Eliminando la arista $\{v_{r-1}, v_r\}$ (o $\{v_1, v_t\}$ si $r = t$ se obtiene un camino mas largo que el t_m inicial. Aplicando el proceso empleado en t_m al camino resultante, se continua incrementando la longitud del camino hasta que incluya todo vértice de G.

Corolario 4.5 *Sea $G = (V, A)$ un grafo sin lazos con n vértices. Si $grad(v) \geq (n - 1)/2$ para $v \in V$, entonces G tiene un camino de Hamilton.*

Demostración. Se cumple la hipótesis del teorema anterior.

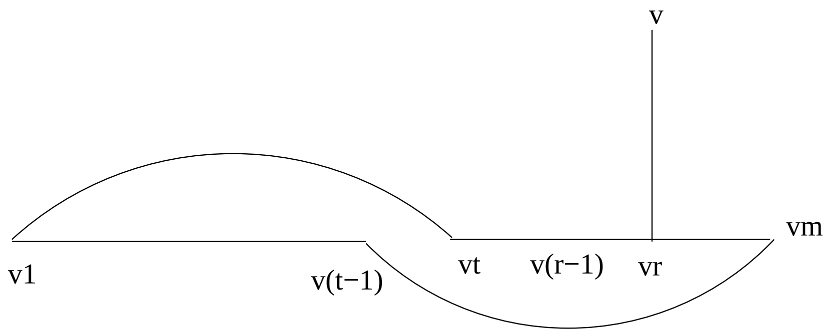

Figura 12: