

Árboles

1. Árboles

Definición 1.1 Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido. G se denomina árbol si es conexo y no contiene ciclos.

Como un lazo es un ciclo de longitud 1, un árbol no tiene lazos.

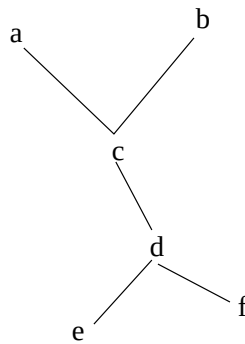


Figura 1: G_1

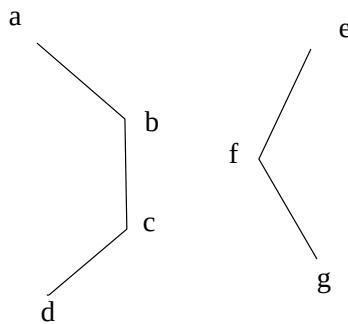


Figura 2: G_2

En la figura 1 G_1 es un árbol y En la figura 2 G_2 no es un árbol pues no es conexo, sin embargo cada componente es un árbol y G_2 se denomina *bosque*.

Definición 1.2 (Árbol abarcador) Es un subgrafo, que contiene los vértices del grafo y es un árbol.

Teorema 1.3 Si a y b son vértices de un árbol $R = (V, A)$ entonces hay un camino único que conecta estos vértices.

Demostración. Primero se observa que en un árbol, todos los caminos son simples (no hay ciclo). Como R es conexo, hay al menos un camino que conecta a con b . Si hubiera mas de un camino que conecta dos vértices se podría formar un ciclo.

Teorema 1.4 Si $G = (V, A)$ es un grafo no dirigido, entonces G es conexo si y solo si tiene un árbol abarcador.

Demostración. Si G tiene un árbol abarcador R , entonces para todo par a, b de vértices de V , un subconjunto de las aristas de R proporciona un camino único entre a y b de modo que G es conexo. Recíprocamente si G es conexo y no es un árbol, elimínense todos los lazos de G . Si el subgrafo resultante G_1 no es un árbol entonces G_1 debe tener un ciclo más largo. Para dichos ciclos elimínense de G_1 una arista diferente. El subgrafo resultante G_2 contiene los vértices de G , es conexo y no contiene ciclos. De ahí que G_2 sea un árbol abarcador para G .

Teorema 1.5 Si $R = (V, A)$ es un árbol, entonces $|V| = |A| + 1$.

Demostración. Por inducción en $|A|$. Si $|A| = 0$ entonces el árbol consta de un solo vértice aislado.

Supongase que el teorema es verdadero para cualquier árbol que contenga a lo sumo k aristas, $k \geq 0$. Considerese ahora un árbol donde $|A| = k + 1$. Eliminemos una arista, obtenemos dos subárboles $R_1 = (V_1, A_1)$ y $R_2 = (V_2, A_2)$ donde $|V| = |V_1| + |V_2|$ y $|A_1| + |A_2| + 1 = |A|$. Como $0 \leq |A_1|, |A_2| \leq k$, por la hipótesis de inducción $|A_i| + 1 = |V_i|, i = 1, 2$. En consecuencia

$$|V| = |V_1| + |V_2| = (|A_1| + 1) + (|A_2| + 1) = (|A_1| + |A_2| + 1) + 1 = |A| + 1$$

Definición 1.6 Llamamos vértices colgantes a los vértices de grado 1.

Teorema 1.7 Para cualquier árbol, $R = (V, A)$, si $|V| \geq 2$, entonces R tiene al menos dos vértices colgantes.

Demostración. Sea $|V| = n \geq 2$. Por el teorema 1.5 $|A| = n - 1$, por un teorema anterior: $2(n - 1) = 2n - 2 = 2|A| = \sum_{v \in V} \text{grad}(v)$. Si $\text{grad}(v) \geq 2$ para $v \in V$, entonces $\sum_{v \in V} \text{grad}(v) \geq 2|V| = 2n$. De donde $2n - 2 \geq 2n$ lo cual es absurdo, luego hay al menos dos vértices v para los que $\text{grad}(v) < 2$. Como no hay vértices aislados, éstos deben ser colgantes.

2. Árboles con raíz

Definición 2.1 Si G es un grafo dirigido, G se denomina árbol dirigido si el grafo no dirigido asociado con G es un árbol. Cuando G es un árbol dirigido, se denomina árbol con raíz si hay un único vértice r , la raíz de G , con el grado de entrada de r igual a 0, y para los restantes vértices v el grado de entrada es 1.

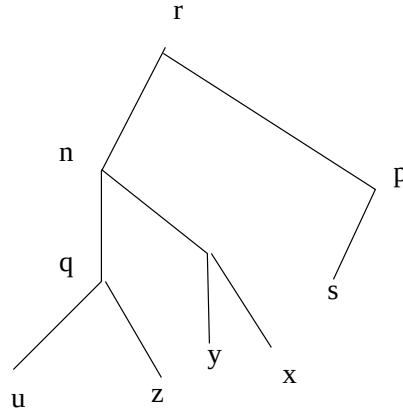


Figura 3:

En los dibujos, se sobreentiende que las direcciones van del nivel superior al nivel inferior de modo que las flechas no son necesarias.

En un árbol con raíz, un vértice v con grado de salida igual a 0 se denomina hoja (o vértice terminal). Los restantes vértices se denominan *nodos de ramificación* (o *vértices internos*).

En la figura 3 el camino de la raíz r hasta s es de longitud 2, por lo tanto se dice que s está en el nivel 2 del árbol. De manera analoga x está en el nivel 3. A s se le denomina *hijo* de p y a p padre de s . Los vértices y, x se consideran *descendientes* de n, r y n, r se denominan *ancestros* de y, x . En general si v_1, v_2 son vértices de un árbol con raíz, existe un camino de v_1 a v_2 y v_1 tiene menor número de nivel entonces v_1 es ancestro de v_2 .

Dos vértices con un padre en común se denominan hermanos. Por último si v_1 es cualquier vértice del árbol, el *subárbol* en v_1 es el formado tomando v_1 como raíz y sus descendientes (puede no haber descendientes).

Definición 2.2 (Recorridos) Sea $R = (V, A)$ un árbol con raíz. Supongamos $|V| > 1$. Sean $R_1, R_2, \dots, R_k$ los subárboles de R según se va de izquierda a derecha (ver figura 4).

1. El recorrido en orden previo de R comienza en la raíz r y después pasa por los vértices de R_1 en orden previo, a continuación por los vértices de R_2 en orden previo y así sucesivamente hasta que se pasa por los vértices de R_k en orden previo.
2. El recorrido en orden simétrico de R primero pasa por los vértices de R_1 en orden simétrico, después por la raíz r y a continuación por los vértices de los subárboles $R_2, \dots, R_k$ en orden simétrico.
3. El recorrido en orden posterior de R pasa por los vértices de los subárboles $R_1, R_2, \dots, R_k$ en orden posterior y a continuación por la raíz.

Definición 2.3 (Búsqueda en profundidad) El siguiente árbol se relaciona con el concepto de recorrido en orden previo.

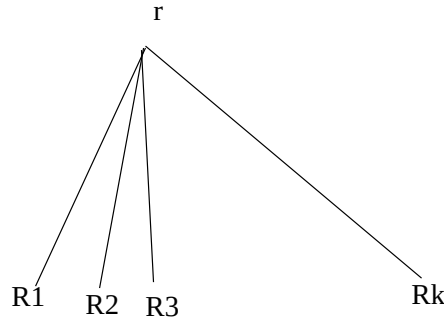


Figura 4:

Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido, conexo, con $r \in V$. Comenzando en r se construye un camino simple en G . Si este camino incluye todo vértice de V , se termina. En otro caso sean x e y los dos últimos vértices visitados en este camino con último vértice y . Entonces se vuelve hacia el vértice x y se construye un segundo camino simple en G que comience en x y no incluya vértices ya visitados. De no existir dicho camino retrocedase al padre p de x . Si todas las aristas que parten del vértice p conducen a vértices ya visitados, retrocedase a un nivel más alto y prosigase con el proceso. Como el grafo es finito y conexo, esta técnica de terminará un árbol R donde r es la raíz de R .

Definición 2.4 (Búsqueda en amplitud) Se designa un vértice como la raíz y se ramifica a los hijos de la raíz. A continuación desde los hijos se ramifica a aquellos vértices (no visitados previamente) adyacentes a uno de estos hijos. Continuando con este proceso nunca se lista dos veces un vértice de modo que no se construye ningún ciclo y con G finito el proceso termina.

Definición 2.5 Si $R = (V, A)$ es un árbol con raíz y $m \in \mathbb{Z}^+$ entonces R se denomina árbol m -ario si el grado de salida de v es m para los vértices internos v . Cuando $m = 2$ se dice que el árbol es un árbol binario.

Teorema 2.6 Sea $R = (V, A)$ un árbol m -ario con $|V| = n$. Si R tiene h hojas e i vértices internos, entonces

1. $n = m \cdot i + 1$
2. $h = (m - 1) \cdot i + 1$
3. $i = (h - 1) / (m - 1) = (n - 1) / m$

Demostración.

1. Si hay i vértices internos, hay $m \cdot i$ vértices más la raíz.
2. Si hay i vértices internos, hay $m \cdot i$ vértices que son hijos más 1 de la raíz da un total de $m \cdot i + 1$ vértices menos los vértices internos que son i me da las hojas, es decir $(m - 1) \cdot i + 1$.
3. Si despejo en 1) $i = n - 1 / m$, si despejo en 2) $i = (h - 1) / (m - 1)$

Definición 2.7 Si $R = (V, A)$ es un árbol con raíz y a es el mayor número de nivel alcanzado por una hoja de R , entonces R tiene altura a .

Se dice que un árbol R con raíz, de altura a está balanceado si el número de nivel de cualquier hoja de R es $a - 1$ o a .

Teorema 2.8 Sea $R = (V, A)$ un árbol m -ario de altura a . Si R tiene h hojas entonces $h \leq m^a$ y $a \geq \lceil \log_m h \rceil$.

Demostración. Por inducción en a . Cuando $a = 1$, R es un árbol con una raíz y m hijos. En este caso $h = m = m^a$ y el resultado es cierto. Supóngase el resultado para un árbol de altura $a - 1$ y considerese un árbol R con altura $a > 1$ y h hojas. (los números de niveles posibles para las hojas son $1, 2, \dots, a$ con al menos m de estas en el nivel a . Las h hojas de R son también las h hojas de los m subárboles $R_i, 1 \leq i \leq m$ de R con raíz en cada uno de los hijos de la raíz. Para $1 \leq i \leq m$ sea h_i el número de hojas del subárbol R_i (en el caso de que la hoja y la raíz coincidan, $h_i = 1$). Pero como $m \geq 1$ y $a - 1 \geq 1$ se tiene $m^{a-1} \geq 1 = h_i$. Por la hipótesis de inducción, $h_i \leq m^{a-1}$ de modo que

$$h = h_1 + h_2 + \dots + h_m \leq m(m^{a-1} = m^a)$$

Con $h \leq m^a, \log_m h \leq \log_m(m^a) = a$ y como $a \in \mathbb{Z}^+, a \geq \lceil \log_m h \rceil$.

Corolario 2.9 Sea R un árbol m -ario con h hojas y altura a . Si R es balanceado, entonces $a = \lceil \log_m h \rceil$

Demostración. Si todas las hojas tienen altura a , hay $h = m^a$ hojas. Es el máximo número de hojas, es decir $h \leq m^a$ de donde $\log_m h \leq a$. No es posible que todas las hojas tengan altura $a - 1$. Esto nos da la cota $h > m^{a-1}$, de donde $a - 1 < \log_m h$ o sea $a < \log_m h + 1$. Como además a es natural, $a = \lceil \log_m h \rceil$.