SISTEMAS DE NUMERACIÓN

1 Introducción

En este capítulo expondremos brevemente (a modo de repaso) conceptos básicos sobre los sistemas de numeración.

No por sencillo el tema deja de ser importante pues nos permite comenzar a acostumbrarnos a los sistemas de numeración utilizados en computación, especialmente el binario y el hexadecimal, tarea no trivial si tenemos en cuenta el "lastre" que significan años y años de práctica con el sistema decimal exclusivamente.

Podemos entender un sistema de numeración como un conjunto de símbolos y un conjunto de reglas de combinación de dichos símbolos que permiten representar los números enteros y/o fraccionarios.

Dentro de los sistemas de numeración posibles un conjunto importante, y destacado, es el constituido por los sistemas de numeración posicionales.

2 Sistemas Posicionales

En estos sistemas la representación de un número se realiza mediante un conjunto de símbolos y su posición relativa dentro de la expresión.

Como ejemplo de un sistema posicional podemos citar al Romano, en el cual es claro que la posición relativa de los símbolos influye en la representación,, lo que lo hace un sistema aditivo/sustractivo. Ej.: VI corresponde al 6 y IV al 4, Uno de los problemas de este sistema de numeración es que continuamente hay que agregar nuevos símbolos a medida que los números crecen sino es imposible representarlos.

Dentro de los sistemas posicionales están incluidos los que serán objeto de nuestro estudio: los sistemas con base.

3 Sistemas con Base

En los sistemas con base un número cualquiera N, se representa mediante un polinomio de la forma:

$$N = a_n b^n + \ldots. + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots.$$

donde a_i es un símbolo del sistema, al que llamamos dígito, y b es la base.

La base es igual a la cantidad de símbolos del sistema. Notando que los dígitos son la representación en el sistema de los números enteros menores que la base, tenemos que se cumple la condición $b > a_i \geq 0$.

La base b la representamos siempre, por convención, en el sistema decimal (si la representáramos en el sistema del cual es base su representación sería, naturalmente, 10).

Habitualmente la representación omite las potencias de la base y coloca un punto (o coma) para separar la parte de potencias positivas de la parte con potencial negativas, quedando:

$$N = a_n\ a_{n-1} \ldots.. a_0\ a_{-1}\ a_{-2} \ldots.\ a_{-p}$$

- *Sistema decimal*: El sistema de numeración utilizado en la vida cotidiana es el decimal, cuya base es diez, utilizando los conocidos diez símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9 .

- *Sistema binario*: Es el sistema de base 2 en el cual los dos símbolos utilizados son el 0 y el 1, los que reciben el nombre de bit (**b**inary dig**it**).

- *Sistema Octal*: Es el sistema de base 8 en el cual se usan los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

- *Sistema Hexadecimal*: Es el sistema de base 16 en el cual se usan los símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F .

La base del sistema en el que está representado un número se suele indicar con un subíndice al final del número y en los casos particulares de base 2 (binario), base 8 (octal), base 16 (hexadecimal) con un subfijo con las letras b, o (ó q) y h respectivamente. En el caso de base 16 tambien se utiliza el prefijo 0x. Si no se indica nada se asume base 10.

Ejemplos:

$$1101_2 = 1101\text{b} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 13 \text{ (decimal)}$$

$$1011.11_2 = 1101.11\text{b} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 11.75 \text{ (decimal)}$$

$$A2F_{16} = A2Fh = 10\cdot 16^2 + 2\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 0\text{xA2F} = 2607 \text{ (decimal)}$$

Estudiaremos a continuación los algoritmos para que, dada la representación de un número en una cierta base, podamos hallar la correspondiente representación en otra base dada.

4 Conversión de Base de Números Enteros

Nuestro deseo es dado un número *N* entero en una base B representado por

$$N = A_n B^n + \ldots + A_0 B^0$$

se desea hallar su expresión en una base *b*

En definitiva lo que buscamos es hallar los valores de a_m , a_{m-1} , . . . , a_0

- *Caso* A:

Conversión de una base B a una base b usando la aritmética de la base b (muy útil para pasar de cualquier base a la base 10).

La conversión se hace a través del polinomio característico, expresando los símbolos $A_n \ldots A_0$ y la base B en la base b y evaluando el polinomio, realizando las operaciones en la base b.

<u>Ejemplo:</u> Convertir A2Fh a decimal.

$$A2Fh = 10\cdot 16^2 + 2\cdot 16^1 + 15\cdot 16^0 = 2607$$

- *Caso* B:

Conversión de una base B a una base b usando la aritmética de la base B (muy útil para pasar de base 10 a cualquier base)

Previamente notemos que:

$N = b \cdot N_1 + a_0$

$N_1 = b \cdot N_2 + a_1$

.

.

.

$N_{n-1} = b \cdot N_n + a_n$

Por lo que los valores $a_0 \ldots a_n$ son los restos de las divisiones de N entre b realizadas en la aritmética de la base B.

$N \mid \underline{b}$

$a_0 \quad N_1 \mid \underline{b}$

$\quad a_1 \quad N_2$

.

.

.

$N_n \mid \underline{b}$

$a_n \quad 0$

<u>Ejemplo</u>: Convertir 653 a binario.

653 | 2
1 326 | 2
0 163 | 2
1 81 | 2
1 40 | 2
0 20 | 2
0 10 | 2
0 5 | 2
1 2 | 2
0 1 | 2
1 0

653 = 1010001101b

<u>Ejemplo</u>: Convertir 653 a base 5.

```
653|5
  3  130|5
       0   26|5
             1   5|5
                   0  1   |5
                      1    0
```

$653 = 10103_5$

Los ejemplos vistos son siempre de decimal a otra base; si quisiéramos pasar desde una base b_1 (b_1 <> 10) a la base b_2 existe la posibilidad de hacer las operaciones con la base b_1 o, por simplicidad, cambiar primero a base 10 y luego de esta a la base b_2.

5 Conversión de Números con parte Fraccionaria

Sea un número $N = N_e + N_f = a_n \cdot b^n + ... + a_1 \cdot b + a_0 + a_{-1} \cdot b^{-1}$ + ... donde N_e y N_f son la parte entera y la parte fraccionaria respectivamente. La parte fraccionaria sigue siempre a la parte entera en cualquier base. Por lo tanto N_e puede convertirse igual que antes y N_f se convierte por separado

Estudiaremos entonces como convertir partes fraccionarias. Sean

$N_f = A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + ...$ *en base B*

$N_f = a_{-1} \cdot b^{-1} + a_{-2} \cdot b^{-2} + ...$ *en base b*

- *Caso* A:

Conversión de base *B* a una base *b* usando la aritmética de la base *b* (muy útil para pasar de cualquier base a base 10)

Sea $N_f = A_{-1} \cdot B^{-1} + A_{-2} \cdot B^{-2} + ... + A_{-m} \cdot B^{-m}$

lo que hago es desarrollar el polinomio equivalente.

Sea $P(x) = A_{-1} \cdot x^1 + A_{-2} \cdot x^2 + ... + A_{-m} \cdot x^m$

Si se calcula el valor numérico de $P(x)$ para $x = B^{-1}$ usando aritmética b obtendremos el valor buscado.

<u>Ejemplo</u> : pasar 0.213_8 a base decimal

$N = 2 \cdot 8^{-1} + 1 \cdot 8^{-2} + 3 \cdot 8^{-3} \Rightarrow P(x) = 3 \cdot x^3 + x^2 + 2 \cdot x$

El valor numérico para $x = \frac{1}{8}$ será:

$P(x) = 3 \cdot (0.125)^{3} + (0.125)^2 + 2 \cdot (0.125) = 0.27148...$

- *Caso* B:

Conversión de una base B a una base b operando con la aritmética de la B (lo que la hace muy útil para pasar de base 10 a cualquier base)

Para determinar los coeficientes a_{-1}, a_{-2}, etc. para la base b se observa que cada uno de tales coeficientes es, en si mismo un entero.

Primero se multiplica por b (con aritmética *B*):

$$b \cdot N_f = a_{-1} + a_{-2} \cdot b^{-1} + ...+ a_{-3} \cdot b^{-2}$$

En donde, la parte entera de $b \cdot N_f$ es a_{-1}. A continuación se resta a_{-1} y se multiplica de nuevo por b:
$b\ (b \cdot N_f - a_{-1}) = a_{-2} + a_{-3} \cdot b_{-1} + ...$ determinando así a_{-2}. Se sigue este proceso hasta que se obtengan tantos coeficientes como se deseen. En el siguiente procedimiento puede ocurrir que el proceso no termine.

Ejemplo: Convertir 653.61 a base 2

$$2 \cdot (0.61) = 1.22 \Rightarrow a_{-1} = 1$$

$$2 \cdot (0.22) = 0.44 \Rightarrow a_{-2} = 0$$

$$2 \cdot (0.44) = 0.88 \Rightarrow a_{-3} = 0$$

$$2 \cdot (0.88) = 1.76 \Rightarrow a_{-4} = 1$$

$$2 \cdot (0.76) = 1.52 \Rightarrow a_{-5} = 1$$

$$653 = 1010001101b \Rightarrow 653.61 = 1010001101.10011...b$$

6 Caso Particular bases 8 y 16

La base 8 (octal) y la base 16 (hexadecimal) tienen una íntima relación con la base 2. Puesto que $8 = 2^3$ cada dígito octal corresponde a 3 dígitos binarios. El procedimiento entonces para convertir un número binario en número octal es dividir en grupos de 3 bits a partir del punto binario y asignando el dígito octal correspondiente a cada grupo.

Ejemplo: convertir 11001010011.111110011_2 a base 8

$$\underbrace{11}_{3}\underbrace{001}_{1}\underbrace{010}_{2}\underbrace{011}_{3}.\underbrace{111}_{7}\underbrace{110}_{6}\ \underbrace{011}_{3} = 3123.7630_{\ 8}$$

La conversión de base 8 a base 2 se hace a la inversa, convirtiendo en binario cada dígito octal, así:

732_8 *es*
$7_8 = 111_b$
$3_8 = 011_b \Rightarrow 732_8 = 111011010_b$
$2_8 = 010_b$

El equivalente hexadecimal de un número binario se obtiene simplemente, dividiendo al primero en grupos de 4 bits.

Ejemplo :

$$\underbrace{1101}_{D}\underbrace{1011}_{B}\underbrace{1000}_{8}\,\underbrace{0110}_{6}.\underbrace{1010}_{A}\,\underbrace{0011}_{3} = 0DB86.A3h$$

Análogamente se realiza para pasar de hexadecimal a binario.

La Tabla 1 presenta la combinación binaria equivalente a cada uno de los símbolos del sistema hexadecimal.

0000	0	1000	8
0001	1	1001	9
0010	2	1010	A
0011	3	1011	B
0100	4	1100	C
0101	5	1101	D
0110	6	1110	E
0111	7	1111	F

Tabla 1 - Conversión binario hexadecimal.

0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
2	**10**	**2**	**2**	**2**	**2**
3	**11**	**10**	**3**	**3**	**3**
4	**100**	**11**	**10**	**4**	**4**
5	**101**	**12**	**11**	**5**	**5**
6	**110**	**20**	**12**	**6**	**6**
7	**111**	**21**	**13**	**7**	**7**
8	**1000**	**22**	**20**	**10**	**8**
9	**1001**	**100**	**21**	**11**	**9**
10	**1010**	**101**	**22**	**12**	**A**
11	**1011**	**102**	**23**	**13**	**B**
12	**1100**	**110**	**30**	**14**	**C**
13	**1101**	**111**	**31**	**15**	**D**
14	**1110**	**112**	**32**	**16**	**E**
15	**1111**	**120**	**33**	**17**	**F**
16	**10000**	**121**	**100**	**20**	**10**

Tabla 2 – Números del 0 al 16 en bases 2, 3, 4, 8 y 16