1. Conjuntos de números

1.1. Números reales

EJERCICIOS

1. Contesta razonadamente si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) No es posible encontrar un número irracional del que se conozcan todas sus cifras decimales.

(b) La suma de un número racional con otro irracional es irracional.

(c) La suma de dos números irracionales es irracional.

(d) El producto de dos números irracionales es irracional.

(e) Entre cada dos números reales distintos hay infinitos racionales e infinitos irracionales.

2. Encuentra un número tal que su cuadrado sea irracional y su cubo racional. ¿Puede ser racional?

3. Sean x e y dos números reales positivos distintos tales que su producto y su cociente son racionales. ¿Han de ser x e y racionales?

4. Transforma las siguientes expresiones en otras equivalentes que no contengan valores absolutos:

(a) $|x|+|x-1|$ **(c)** $\dfrac{|x-1|}{|x+8|}$ **(e)** $|x^2-2|+x$ **(g)** $|x^2-3x-4|$

(b) $x-|x-|x||$ **(d)** $||x|-1|$ **(f)** $|x|-|x|^2$ **(h)** $|x-1-x^2|$

5. Calcula:

(a) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}(-n,n)$ **(b)** $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(2-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$ **(c)** $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}\right)$

6. Calcula, si existen, cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, y máximo y mínimo, de los conjuntos:

(a) $\{2,\ 2.2,\ 2.22,\ 2.222,\ldots\}$ **(c)** $\{x\in\mathbb{R}: x^2+x+1\geq 0\}$ **(e)** $\left\{\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\right\}$

(b) $\{\pm 0.9,\ \pm 0.99,\ \pm 0.999,\ldots\}$ **(d)** $\{x\in\mathbb{R}: x^2+x-1\leq 0\}$ **(f)** $\left\{\dfrac{1}{n} : n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$

7. Demuestra que para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple que:

$$\left|\frac{1}{x^2+2}+\frac{1}{2+|x|}\right|\leq 1$$

8. Demuestra que si $|x|\leq 1$ entonces:

$$|x^3+x^2+3x+5|\leq 10$$

9. Resuelve las siguientes inecuaciones, representando su solución en la recta real:

(a) $0<|x-3|<5$ **(c)** $(x+2)^2\geq 9$ **(e)** $|x+3|+|x-1|>8$ **(g)** $||x+3|-|x-1||<2$

(b) $|3x+1|\geq 1$ **(d)** $|2x+5|>|3x+1|$ **(f)** $|x+3|+|x-1|<3$ **(h)** $|x^2-2x|-x\leq 0$

10. Prueba que, para cualesquiera $a,b\in\mathbb{R}$, se cumple que:

$$ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$$

11. Usando la fórmula obtenida en el problema anterior, prueba que si $0\leq a\leq b$, entonces:

$$a\leq\sqrt{ab}\leq\frac{a+b}{2}\leq b$$

es decir, que la media aritmética de dos números positivos es mayor o igual que su media geométrica, y que ambos valores están comprendidos entre ellos.