

Curso de Matemática Tecnólogo Informático

Unidad 1 - Número Real – Definición Axiomática

Axiomas de Cuerpo

1. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x + y = y + z$ entonces $x = z$ (Cancelativa en la suma)
2. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $x + y = y + x$ (Conmutatividad en la suma)
3. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Asociatividad en la suma)
4. Existe $0 \in \mathbb{R}$ de manera que $x + 0 = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (Neutro aditivo)
5. Para cada $x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $-x \in \mathbb{R}$ tal que $-x + x = 0$ (Opuesto)
6. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ e $y \neq 0$, si es $xy = yz$ entonces es $x = z$ (Cancelativa del Producto)
7. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces $xy = yx$ (Conmutativa del Producto)
8. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $(xy)z = x(yz)$ (Asociativa del Producto)
9. Existe $1 \in \mathbb{R}$ de manera que $x1 = x$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$ (Neutro del Producto)
10. Para cada $x \neq 0, x \in \mathbb{R}$ existe un elemento $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $x^{-1}x = 1$ (Inverso)
11. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces $x(y + z) = xy + xz$ (Distributiva)

Axiomas de Orden

12. Si $x, y \in \mathbb{R}$, entonces se cumple sólo una de estas: (Tricotomía)
o $x < y$
o $y < x$
o $x = y$
13. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $y < z$ entonces $x < z$ (Transitiva)
14. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$ y $x < y$, entonces $x + z < y + z$ (Monotonía en la suma)
15. Si $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x < y$ y $0 < z$, entonces $xz < yz$ (Monotonía en la multiplicación)

Axioma de Completitud

16. Si $E \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío y acotado, entonces E tiene extremos en.

Los axiomas del 1 al 15 corresponden a la estructura más general de cuerpo ordenado. El último axioma es el que distingue $\mathbb{R}$ de otros cuerpos ordenados como $\mathbb{Q}$.

Definición: "Se dice que un conjunto es acotado cuando tiene cotas superiores e inferiores. Si sólo tiene cotas superiores se dice acotado superiormente, análogamente para la acotación inferior"

Definición: "Se dice que un n° real a , es una cota superior de un conjunto $M \Leftrightarrow a \geq m, \forall m \in M$ "

Propiedad: "Si un n° a es una cota superior de un conjunto $M \Rightarrow$ todo n° real $b > a$ es cota superior de M "

Corolario: "Si un conjunto M tiene una cota superior, entonces tiene ∞ . El conjunto de cotas superiores de un conjunto M , es otro conjunto que tiene mínimo, es decir existe en dicho conjunto un elemento que es $<$ que todo otro elemento de ese conjunto"

Definición: "Se llama extremo superior o supremo de un conjunto a la menor de sus cotas superiores"

Definición: "Se dice que un conjunto M tiene máximo $\Leftrightarrow$ existe $m' \in M / m' \geq m, \forall m \in M$ ". También se dice que si el supremo de un conjunto pertenece a dicho conjunto $\Rightarrow$ el extremo superior es además máximo del conjunto.

Se plantea como Tarea Domiciliaria, escribir las definiciones, propiedades y corolarios correspondientes a las acotaciones inferiores.

Propiedad: "Absorción del 0" – (Hankel) – (Se demostrará como aplicación del uso de los axiomas anteriores.)

"Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x \cdot 0 = 0$ "

Demostración: (como aplicación de los axiomas)

$x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-x + x)$ **por axioma 4**, $x \cdot 0 + (-x + x) = (x \cdot 0 + x) + (-x)$, **por axioma 3**, $(x \cdot 0 + x) + (-x) = (x \cdot 0 + x \cdot 1) + (-x)$, **por axioma 9**, $(x \cdot 0 + x \cdot 1) + (-x) = x \cdot (0 + 1) + (-x)$, **por axioma 15**, $x \cdot (0 + 1) + (-x) = x \cdot 1 + (-x)$, **por axioma 4**, $x \cdot 1 + (-x) = x + (-x)$, **por axioma 9** y finalmente $x + (-x) = 0$ **por axioma 5**, lo que demuestra la igualdad.

Breve Reseña de Conjuntos Numéricos

Los Naturales - $\mathbb{N}$

Los números Naturales, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ incluido el 0, satisfacen los requerimientos más comunes a la hora de enumerar objetos. Puede asumirse que es esa, su funcionalidad básica. Las operaciones aritméticas cerradas en este conjunto son la suma y el Producto, o sea sólo 2. Desde un punto de vista meramente aritmético su "potencia", es decir la cantidad de operaciones cerradas en este conjunto, es la más reducida. Algunas de sus características más importantes lo son:

- 1) Tiene mínimo, que es el 0.
- 2) No tiene máximo.
- 3) Tiene elementos "consecutivos", es decir no es un conjunto Denso.
- 4) Potencia aritmética = 2. $\{+, \cdot\}$

Los Enteros - $\mathbb{Z}$

Este conjunto se crea para que, además de la suma y el producto, la resta entre sus elementos siempre se pueda realizar. Su creación se basa en los Naturales de tal forma que un n° entero es toda resta de naturales. De esta manera, cuando la resta de naturales es natural entonces el número entero resultante

coincidirá con el natural, pero si dicha resta en los naturales no existiera, en los enteros siempre habrá solución, por cuanto toda resta de naturales es siempre un entero.

Está claro que existen ∞ restas de naturales que dan el mismo resultado, por tanto existen ∞ restas de naturales que determinan el mismo n° entero. Si identificamos cada una de esas restas por un “par ordenado” de naturales (m, n) , donde m representa el minuendo y n el sustraendo, podremos decir que todo par ordenado de naturales con $m > n$ representa un natural o sea, un entero positivo. Todo par ordenado con $m = n$, representa al entero 0 y finalmente, si es $m < n$, se tendrá un número entero negativo. Estos últimos representan la verdadera ampliación del conjunto numérico realizada al pasar de los $\mathbb{N}$ a los $\mathbb{Z}$.

De esta forma, con este conjunto numérico podemos abordar toda problemática de enumerar objetos cuyo resultado sea, tanto mayor o menor que 0.

Los números enteros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$ presentan las siguientes características:

- 1) No tiene mínimo.
- 2) No tiene máximo.
- 3) Presenta elementos consecutivos, es decir NO es denso.
- 4) Potencia aritmética = 3. $\{+, -, *\}$

Los Racionales - $\mathbb{Q}$

Este conjunto de números basa su existencia en el problema de “medir magnitudes”. Para resolver este problema es necesario poder dividir una cantidad dada, en determinadas partes alícuotas, es decir, que sean sub-múltiplas de la primera. Esta necesidad hace a la posibilidad de poder dividir siempre 2 números dados, operación ésta, que en los enteros, no siempre es posible. Por tanto un número racional se define como el resultado de dividir 2 enteros siendo el divisor, en todos los casos un entero $\neq 0$.

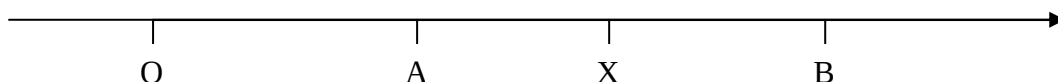
Por lo tanto, el conjunto de números racionales se define como

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

En el siglo XIII, Leonardo Da Vinci, mejor conocido como

Fibonacci, introdujo en Europa la barra horizontal para separar numerador y denominador en las fracciones.

Densidad en los Racionales

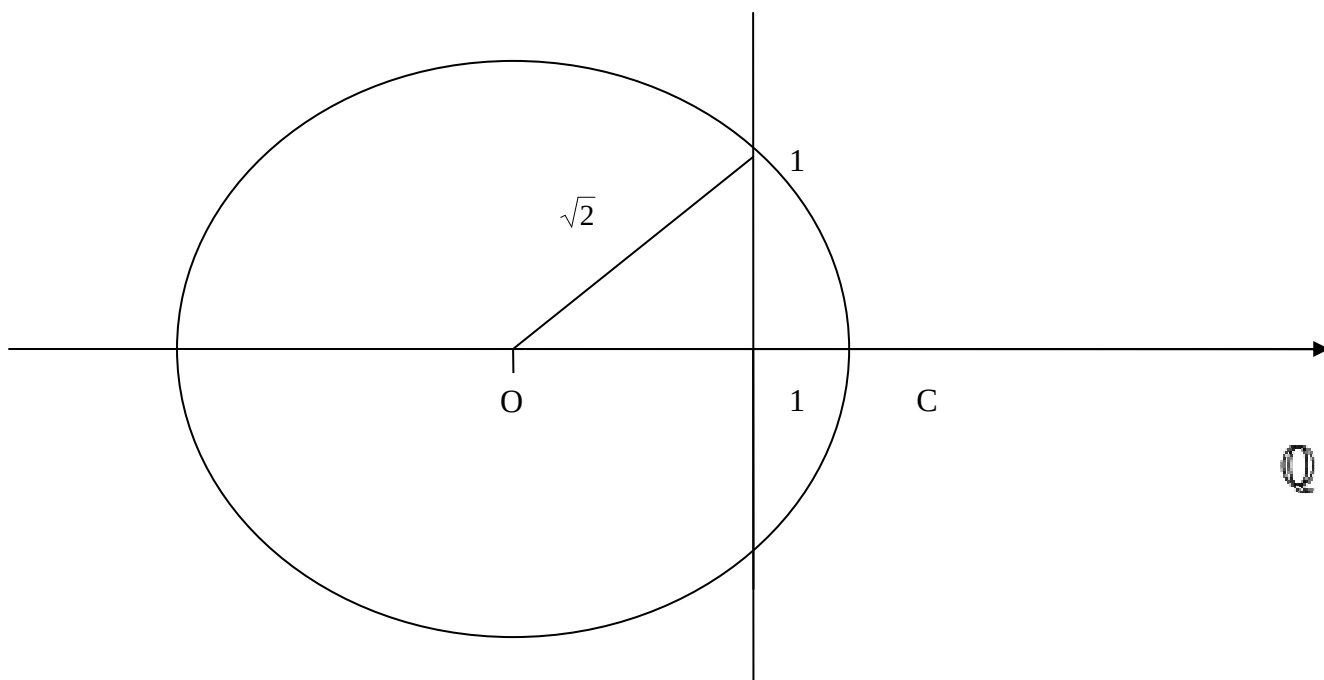


Supongamos que los puntos A y B representan a dos números racionales r y s . Sea por otra parte el punto X, punto medio del segmento AB, ¿qué cosa es lo que este punto representa, si es que representa algo?

Bien, de los supuestos hechos, resulta claro que $r = \overline{OA}$ y que $s = \overline{OB}$, sea x el elemento representado por X , lo que nos hace ver que $x = \overline{OX}$. Como $\overline{AX} = \overline{XB}$, entonces debe ser $x - r = s - x$ de donde se deduce que $2x = r + s$ y de aquí que $x = \frac{r+s}{2}$, con lo que concluimos que $x \in \mathbb{Q}$. Por tanto, este

resultado nos dice que dados 2 racionales arbitrarios, entre ellos por lo menos existe otro, que es su semi suma. Aunque en realidad, el mismo argumento justifica la existencia de ∞ racionales, entre 2 dados. Este resultado es nuevo, este es el primer conjunto numérico estudiado que presenta esta particularidad. Ahora bien, sabemos que entre 2 racionales hay ∞ racionales y que existen ∞ de estos, ¿significa esto que este conjunto de números y el conjunto de puntos de una recta son biyectivos?

Supongamos por un momento que si, es decir que para cada número racional existe un y sólo un punto de una recta y que, por otra parte, este, es el correspondiente de ese y sólo ese número racional, por lo tanto podemos llamar a esa recta “eje racional”. Lo que inevitablemente, nos conduce a la tesis, aún no probada, de que cada punto de esa recta, debe ser el representante de un número racional y más aún, no puede existir sobre esta recta, ningún punto que no sea el representante de un número de $\mathbb{Q}$



El punto C, que $\in$ al eje racional, debe ser por tanto, el representante de un número racional, al mismo tiempo, dicho número interpreta la medida del segmento $\overline{OC}$, el cual es igual en magnitud, a $\sqrt{2}$, por ser radios de giro. Por tanto la conclusión lógica es que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Teorema – (Supuestamente de los Pitagóricos 500 ac)

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, para probar esto supongo cierto lo opuesto, es decir $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, por tanto $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, con p y $q \in$

$\mathbb{Z}$ y $q \neq 0$ y además $D(p,q) = 1$, es decir p y q primos entre si.

Esto implica que la fracción $\frac{p}{q}$ es irreducible. Consideremos entonces en base a nuestro supuesto inicial que

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, elevemos al cuadrado para eliminar el radical, con lo que obtenemos que $2 = \frac{p^2}{q^2}$, de donde se

sigue que $p^2 = 2q^2$ lo que implica que p^2 es par, por lo tanto p es par. Si p es par, entonces existe un entero k tal que $p = 2k$, elevando al cuadrado $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$, para luego sustituir en $p^2 = 2q^2$, con lo cual $4k^2 = 2q^2$.

Simplificando $q^2 = 2k^2$ con lo que q^2 es par y por tanto q es par. Pero esto niega la condición inicial de que p y q eran primos entre sí, con lo que se establece una contradicción o absurdo, sólo explicada por el supuesto inicial hecho, por tanto $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ como se quería probar.

Los Números Irracionales, o la oveja negra de la familia

El teorema anterior pone de manifiesto la existencia de puntos en la recta, que representan números que no son racionales. Hay efectivamente “muchos más de estos puntos”, que de aquellos que representan racionales, esto es así desde que George Cantor, probó la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y al mismo tiempo la innumerabilidad de $\mathbb{R}$ ya que sin más ni más, a todos los números que se representan por puntos de una recta y $\notin \mathbb{Q}$, se les define como Irracionales, mientras que paralelamente a la unión de estos conjuntos, se le llama Reales, es decir $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Así, todo número Real tiene en principio, 2 opciones, o es un Real Racional o es un Real Irracional.

De esta forma, para que $\mathbb{R}$ sea no numerable, como $\mathbb{Q}$ si lo es, es condición necesaria y suficiente que $\mathbb{I}$ sea no numerable, debido a que la unión de numerables es numerable. Como la no numerabilidad implica un cardinal mayor que el cardinal de los Naturales, se desprende que existen más irracionales que racionales ya que el cardinal del primero supera al del segundo.

La naturaleza del n° irracional es desde épocas de los griegos, algo raro, algo diferente a lo conocido sobre Naturales, Enteros y Racionales. Es como definir algo por ser lo que No es. En este conjunto ninguna de las operaciones cerradas en los anteriores mantiene esta cualidad. Como ya se ha advertido, es este conjunto el que sienta las bases de otro problema, hay jerarquías de ∞ , contra lo admitido y contra poderosos credos religiosos.

En el sistema numérico Decimal, un número irracional se expresa por una parte entera y una parte decimal, la cual está compuesta por ∞ cifras. Estas, no siguen ninguna ley predeterminada, lo que hace dicha secuencia aleatoria. Nuevamente esto es así, por oposición a la representación decimal de un número racional, el cual o tiene una parte decimal compuesta por un número finito de cifras y luego todos 0, o presentan una secuencia finita, que se reitera indefinidamente, llamados racionales exactos y periódicos, respectivamente.

Algunos de los más conocidos números irracionales son el n° e , el n° π , entre otros

El número Π

Los geómetras habían constatado, desde muy antiguo, que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro se mantenía constante, independientemente del tamaño de la misma. A ese número, que muchos siglos más tarde se demostró era irracional, le llamaron pi (Π). Fue Arquímedes el primero que científicamente calculó el número Π por aproximaciones sucesivas, utilizando un método geométrico, dando como valor:

$3,140845 < \pi < 3,142857$ - En Enero de 2010, Fabrice Bellard estableció un nuevo record mundial de cifras para el número π al conseguir 2.7 trillones de dígitos decimales.

Carácter Irracional de π

Teorema de Lambert – H) $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \tan(x)$ es Irracional

Como $\tan(\pi/4) = 1$ y 1 es racional entonces debe ser $\pi/4$ irracional, de donde se deduce que π es **Irracional**.

El número e

Consideremos el conjunto $M = \{ (1+1/n)^n / n \in \mathbb{N} \text{ y } n \neq 0 \}$, y veamos si cumple con los requerimientos del axioma de completitud.

- 1) Es fácil advertir que $M \neq \emptyset$, ya que para $n = 1$ se tiene un elemento que es $2 \in M$.
- 2) Ahora veamos lo que tiene que ver con la acotación.

Veremos primero que los elementos de M son una sucesión creciente, con lo que estaremos demostrando que tiene mínimo, que ese mínimo es 2 y por lo tanto habremos verificado el axioma de completitud, (en este caso el extremo inferior es también 2), en lo que tiene que ver con la acotación inferior.

Por tanto, para probar que los elementos de M forman una sucesión creciente, habrá que probar que $m_n < m_{n+1}$ o lo que es lo mismo:

$(1+1/n)^n < (1+1/(n+1))^{n+1}$, para lo cual echaremos mano a la fórmula del desarrollo de la potencia de un binomio, o más conocida como la fórmula de Newton de la potencia de un binomio.

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$ Para el caso de m_n $a = 1$ y $b = 1/n$, mientras que para m_{n+1} , se tendrá $a = 1$ y $b = 1/(n+1)$, con lo cual se tienen los siguientes desarrollos:

$$I) (1+1/n)^n = C_0^n (1/n)^0 + C_1^n (1/n) + C_2^n (1/n)^2 + \dots + C_r^n \left(\frac{1}{n}\right)^r + \dots + C_n^n (1/n)^n$$

$$II) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = C_0^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^0 + C_1^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^1 + C_2^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \dots + C_r^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^r + \dots + C_{n+1}^{n+1} \left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

La suma I tiene $n+1$ sumandos, mientras que la suma II tiene $n+2$, o sea, un sumando más. Si fuera posible mostrar que cada término de la suma I es $\leq$ que su correspondiente en la suma II, entonces como esta última tiene además un sumando extra, será entonces $\geq$ que la primera, con lo cual estaremos probando que los elementos de M , constituyen una sucesión creciente y de esta forma que están acotados inferiormente. Para probar esto último, basta con hacerlo para un término genérico de ambos desarrollos, (los de color amarillo) y lo que probemos para estos, valdrá para cada par de términos correspondientes.

Según ya hemos visto en Teoría Combinatoria, los coeficientes o números combinatorios se determinan:

$C_n^m = \frac{m!}{n!(m-n)!}$, por tanto las $C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots[n-(r-1)]}{r!}$ y sacando en el numerador n de factor común en los r factores, podemos escribir:

$C_r^n = \frac{(1-1/n)(1-2/n)\dots[1-(r-1)/n]n^r}{r!}$ y como en I, este cociente está multiplicado por $(1/n)^r$, entonces las potencias r de n se simplifican entre si, quedando como expresión última para el término genérico de I):

$\frac{(1-1/n)(1-2/n)(1-3/n)\dots[1-(r-1)/n]}{r!}$. Por otra parte, realizando las mismas transformaciones en el término genérico de II), sólo que se factora (n+1) en los r factores del numerador, para que las potencias de exponente r de (n+1), se simplifiquen entre sí, resulta:

$\frac{(1-1/n+1)(1-2/n+1)(1-3/n+1)\dots[1-(r-1)/n+1]}{r!}$. Al comparar estas 2 expresiones vemos que en realidad la comparación se reduce a los numeradores ya que ambos denominadores son iguales, por tanto si alguna de ambas es mayor que la otra, será la que tenga mayor numerador. Para ello observemos primero que ambos numeradores son productos con igual cantidad de factores, (r-1), en ambos casos. Por lo tanto, analicemos primero el primer factor del I) con el primer factor del II), vemos que:

$(1-1/n) < (1-1/n+1)$ pues ambos son restas de igual numerador, por tanto el que tenga menor sustraendo será la mayor resta y esta es la de II), pues $n+1 > n$ entonces $1/n+1 < 1/n$, lo que explica la primer desigualdad. Análogamente se justifican las restantes desigualdades:

$(1-2/n) < (1-2/n+1)$; $(1-3/n) < (1-3/n+1)$;.....; $[1-(r-1)/n] < [1-(r-1)/n+1]$, por ende el producto del numerador del término II) es mayor que el producto numerador del término I) y con esto, como habíamos presentado, hemos probado que los elementos del conjunto M, forman una sucesión creciente y así queda justificada la acotación inferior.

Ahora, por último, probemos que M está acotado superiormente. Para ello primero, calculemos algunos de sus elementos:

$n = 1$ entonces $m = 2$; $n = 2 \Rightarrow m = 2,25$; $n = 3 \Rightarrow m = 2,37$; $n = 10 \Rightarrow m = 2,594$; $n = 100 \Rightarrow m = 2,705$; $n = 1000 \Rightarrow m = 2,7169$; $n = 10000 \Rightarrow m = 2,71814$.

De la lista de elementos de M, se intuye la posibilidad de que, a pesar de ser una sucesión estrictamente creciente, los elementos de M, no superan al 2,8. Vamos a probar por tanto, que $m < 3 \forall m \in M$. Con esto quedará sentenciada la acotación superior de M y de acuerdo al axioma de completitud, debe existir un n° Real, extremo superior de M.

Como ya se ha visto:

$$(1+1/n)^n = C_0^n (1/n)^0 + C_1^n (1/n) + C_2^n (1/n)^2 + \dots + C_r^n \left(\frac{1}{n}\right)^r + \dots + C_n^n (1/n)^n =$$

$$1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(r-1)]}{r!} \frac{1}{n^r} + \dots =$$

Sacando n de factor común en los numeradores de cada término y simplificando con la respectiva potencia de n que aparece en el término respectivo, resulta que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{(1-1/n)}{2!} + \frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!} + \dots + \frac{(1-1/n)(1-2/n)\dots[1-(r-1)/n]}{r!} + \dots <$$

$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{r!} + \dots$, pues se han sustituido todos los numeradores por 1, siendo estos, mayores que los numeradores originales, por tanto por transitiva de las desigualdades se tiene que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{r!} + \dots < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^r} + \dots =$$

En base a las sustituciones: $1! = 2^0 = 1$; $2! = 2^1 = 2$; $3! = 6 > 2^2 = 4$; $4! = 24 > 2^3 = 8$, por lo que a partir del 4º sumando de la última suma, este y todos los que le siguen son mayores que sus predecesores, por tanto resulta que:

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^r} + \dots$, en donde la suma que se genera a partir del 2º sumando en adelante es una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, cuyo valor viene dado por:

$$\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1} \right], \text{ tomando límites para } n \rightarrow \infty, \text{ ya que la desigualdad se prueba } \forall m \in M, \text{ lo cual implica}$$

que se cumpla para todo n, es decir para $n \rightarrow \infty$, resulta que $(1/2)^n \rightarrow 0$, con lo que el numerador de la expresión última tendrá como límite -1. Por otra parte el denominador es $-\frac{1}{2}$, con lo cual vemos que al hacer $n \rightarrow \infty$, la suma de la geométrica tiende a 2, por lo que podemos sustituir en la última desigualdad y resulta que:

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$, con lo cual hemos probado lo que nos habíamos propuesto es decir que todo elemento de M es menor que 3, con lo cual M es acotado superiormente y por tanto de acuerdo al axioma de completitud, tiene extremo superior.

Definición: “Se llama n° e, al extremo superior del conjunto M”. Su valor aproximado es 2,71828.

Carácter Irrracional de e

Comenzamos mostrando una propiedad bien conocida del número e :

$$(1) \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Supongamos ahora que podemos obtener e como cociente de dos enteros positivos (por la expresión anterior claramente e debe ser positivo), es decir:

$$(2) \quad e = \frac{p}{q}$$

siendo p y q enteros positivos. Multiplicamos la expresión (1) por $q!$ a ambos lados, obteniendo:

$$(3) \quad q!e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \dots$$

Por (2) tenemos que $q!e$ es un número entero, y claramente la parte de la suma que aparece explícitamente en (3) también es un número entero. Por tanto la diferencia entre ellos, digamos R , también será un número entero (y positivo). Veamos qué forma tiene R :

$$R = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \dots$$

Simplificamos los factoriales:

$$R = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots$$

Como $q+2 > q+1$, $q+3 > q+1$, etc., se cumple la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots < \\ &< \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \dots \end{aligned}$$

Sacando factor común y usando nuevamente la fórmula de la suma de una progresión geométrica de razón q :

$$\begin{aligned} R &< \frac{1}{q+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{(q+1)} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{q+1}} \right) = \frac{1}{(q+1)} \cdot \frac{(q+1)}{q} = \frac{1}{q} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R < \frac{1}{q} \end{aligned}$$

Pero q era un entero positivo, por tanto $q > 1$. En consecuencia su inverso será menor que 1. Tenemos entonces que R es un número entero positivo que cumple la siguiente cadena de desigualdades:

$$0 < R < \frac{1}{q} < 1$$

Pero como no existe ningún número entero entre 0 y 1 tenemos que la esta situación no puede darse. Es decir, hemos llegado a una contradicción que partió del hecho de suponer que e era racional. Por tanto, utilizando reducción al absurdo, obtenemos que **el número e es un número irracional**.

Valor Absoluto de una expresión Real

El valor absoluto de un número real, es su valor después de quitarle su eventual signo negativo. Si el número es positivo, su valor absoluto es él mismo; mientras que si es negativo, el valor absoluto es el número opuesto.

Se nota $|x|$ el valor absoluto de x ; en las calculadoras y los ordenadores se utilizan las letras *abs*.

Por ejemplo: $|-4,5| = 4,5$ (se quita su signo negativo) y $|3,14| = 3,14$ (no se modifica).

Visto como función, el valor absoluto se define distinguiendo según el signo del número:

$$abs(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Su representación gráfica coincide con la diagonal $y = -x$ cuando x es negativo, y con la diagonal $y = x$ cuando es positivo (ver figura).

Propiedades elementales:

- $|-a| = |a|$ (paridad de la función valor absoluto)
- $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$
- $||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|$ (desigualdades triangulares)
- $|a^n| = |a|^n$

Se propone como ejercicio, demostrar estas igualdades, usando la definición dada.

Potencias y Radicales en Reales

1) Veamos que podemos hacer con las potencias de base real y exponente Natural > 0

Def.: “Sea $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ entonces $a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$, con n factores a ”

De esta definición se prueban fácilmente las siguientes propiedades:

- a. $a^n * a^m = a^{n+m}$
- b. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ en estas condiciones si hacemos $n = m$ entonces $n-m = 0$ por tanto resulta una nueva propiedad que dice: $(a)^0 = 1$
- c. $(a^n)^p = a^{n \cdot p}$
- d. $(a)^n \cdot (b)^n = (a \cdot b)^n$
- e. $\left(\frac{a}{b} \right)^n = \frac{(a)^n}{(b)^n}$

2) Consideremos ahora que el exponente es Entero negativo.

De la propiedad a del apartado anterior, sean ahora n y m enteros opuestos, supongamos $n > 0$, por lo que será m un entero < 0 , pero a su vez $n + m = 0$ por ser opuestos, entonces se cumple que:

$a^m * a^n = 1$ de donde $a^m = \frac{1}{a^n}$, con lo cual se calculan las potencias de exponente entero negativo, a través de `potencias de exponente natural. Es inmediato probar que con la relación anterior, las 5 propiedades del apartado anterior para exponente natural siguen valiendo en caso de exponente entero negativo. Queda como tarea domiciliaria verificarlo.

3) Potencia de base Real y exponente Racional

Supongamos que buscamos solución al problema de hallar 2 racionales p y q tales que una potencia de base real a y exponente p.q de cómo resultado a.

$a^{p \cdot q} = a$ entonces debe ser $p \cdot q = 1$, con lo que p y q deben ser inversos. Esto es equivalente entonces, a escribir que:

$(a^p)^{1/p} = a$, pero por definición, si $a^r = b \Rightarrow a = \sqrt[r]{b}$, ahora elevando al inverso de r por lo anterior visto: $(a^r)^{1/r} = b^{1/r} = a = \sqrt[r]{b}$, por tanto se cumple que: $b^{1/r} = \sqrt[r]{b}$, igualdad que expresa una correlación, una identidad muy fuerte entre las potencias de exponente racional y las raíces. Incluso para apreciar de mejor modo esa relación, si en la última igualdad hacemos que $b = c^h$, resultará que:

$$(b)^{1/q} = (c^r)^{1/q} = (c)^{r/q} = \sqrt[q]{b} = \sqrt[q]{c^r}$$

que no hace otra cosa que expone que un número real elevado a un exponente fraccionario es la raíz de índice el divisor del exponente, cuya cantidad sub radical es la base real de la potencia considerada, elevado a un exponente que coincide con el numerador del exponente fraccionario. Con estas consideraciones se prueba fácilmente la extensión de las 5 propiedades ya vistas para exponente natural, al caso de exponente Racional.

Observación:

Al plantear que: $a^r = b \Rightarrow a = \sqrt[r]{b}$, es menester hacer el siguiente comentario acerca de las consecuencias que trae aparejado el hecho de que el exponente entero r sea par o impar.

- 1) Si r es par, como $a \in \mathbb{R}$ en todos los casos debe ser para que la igualdad pueda ser cierta, que el número real $b \geq 0$, de lo contrario, decimos que el símbolo $\sqrt[r]{b}$, carece de significado en este conjunto numérico.
- 2) Si r es impar, no es necesario realizar ninguna limitación a la definición anterior.

En síntesis, al trabajar con radicales en el conjunto de los Reales, si se trata de radicales de índice par, debemos exigir a la cantidad sub radical $b \geq 0$, para que esta simbología, tenga el sentido con el que fue definida.

Función Exponencial y Logarítmica en los Reales

Una función $f(x) = (a)^x$, con $a \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{Q}$, definida de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, queda definida con las únicas restricciones de que $a > 0$ y $a \neq 1$. Dicha función es biyectiva $y > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. Naturalmente que como la estructura matemática de la función exponencial es una potencia, valen en su caso todas las propiedades vistas en el apartado correspondiente. Las condiciones exigidas a la base, son requisitos indispensables para asegurar la biyección, pero de ninguna manera debe tomarse como limitante para efectuar cálculos de potencias de base < 0 . La biyección es una propiedad muy importante ya que en ella se basa la existencia de la función inversa, que también será biyectiva como le es la función logarítmica.

Para el caso que $a > 1$, el $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$ para $x \rightarrow -\infty$ se puede interpretar en función de lo visto para potencias de exponente entero negativo, como $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(a)^{-x}}$, para $-x \rightarrow +\infty$, lo cual da 0^+ . La función exponencial de base $a > 1$ es estrictamente creciente, como se puede advertir fácilmente a través del siguiente razonamiento: "Si para todo par de valores x e y , con $x < y$, se tiene que sus imágenes, es decir: $(a)^x < (a)^y$ entonces la función exponencial es estrictamente creciente".

$y > x \Rightarrow y = x + \alpha$, con $\alpha > 0 \Rightarrow (a)^y = (a)^{x+\alpha} = (a)^x \cdot (a)^\alpha$, como $\alpha > 0$ y $a > 1$, entonces es $(a)^\alpha > 1$, por tanto $(a)^x \cdot (a)^\alpha > (a)^x$, con lo cual se prueba que $(a)^y > (a)^x$. Síntesis: "Como el límite de $(a)^x$ para $x \rightarrow -\infty$ es 0^+ y esta función es estrictamente creciente, se deduce que $\forall x$ es $(a)^x > 0$.

Análogamente, para bases $0 < a < 1$, se prueba que esta es decreciente y que converge a 0^+ , para $x \rightarrow +\infty$, con lo cual se termina de comprobar que toda función exponencial es estrictamente positiva.

Función Logarítmica

Definición: "Se llama logaritmo en base a del número x al exponente b al que hay que elevar la base para obtener dicho número."

$$(a)^x = b \Leftrightarrow x = \log_a^b$$

que se lee : "el logaritmo en base a del número b es x ", o también : "el número x se llama logaritmo del número b respecto de la base a ".

Como podemos ver, un logaritmo no es otra cosa que un exponente, hecho que no debemos olvidar cuando trabajemos con logaritmos. La constante **a** es un número real positivo distinto de 1, y se denomina base del sistema de logaritmos. La potencia a^b para cualquier valor real de b solo tiene sentido si $a > 0$. La función logarítmica (o función logaritmo) es una aplicación biyectiva del conjunto de los números reales positivos, sin el cero, en el conjunto de los números reales :

$$\begin{array}{ccc} \log_a: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & a^x & \longrightarrow x \end{array}$$

Es la función inversa de la función exponencial. La operación logaritmación (extracción de logaritmos, o tomar logaritmos) es siempre posible en el campo real cuando tanto la base a del logaritmo como el número x son positivos, (siendo, además, a distinto de 1)

Propiedades :

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a a^x = x$
- $a^{\log_a x} = x$
- $\log_a (u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$
- $\log_a \left(\frac{u}{v} \right) = \log_a u - \log_a v$
- $\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u$
- $\log_a \sqrt[n]{u} = \frac{1}{n} \log_a u$
- $\log_a b = (\log_c b)(\log_a c)$ “fórmula del cambio de base”

Se dejan como Tarea Domiciliaria la justificación de cada una de estas propiedades.