Matemática Discreta y Lógica 1
Sede Buceo

# Repartido Teórico: Conjuntos

Un *conjunto* es una colección de objetos. Un conjunto puede describirse indicando cada uno de sus elementos (*descripción por extensión*) o mediante reglas que satisfacen únicamente los elementos del conjunto (*descripción por comprensión*).

**Ejemplo**

$$D = \{\text{Días de la semana en los que hay clase de MDL 1}\} =$$
$$= \{\text{lunes, miércoles}\}$$

El conjunto está descrito por comprensión en el primer caso y por extensión en el segundo caso, siempre deben escribirse entre llaves las reglas que definen los elementos del conjunto así como la lista de elementos.

Observemos que para poder describir un conjunto por extensión, este debe ser finito.

Recordemos algunos conjuntos numéricos con los que trabajaremos a lo largo del curso:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\},$$
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\},$$
$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}.$$

**Ejemplo**

$$A = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 5, n \text{ impar } \} = \{n \in \mathbb{N} : 1 \leq n \leq 5, n \neq \dot{2}\} = \{1, 3, 5\}$$

Observemos que la definición por comprensión no es única, también tenemos que

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n < 6, n \neq \dot{2}\} = \{1, 3, 5\}$$

## Notación

Decimos que *a pertenece* a $A$ y escribimos

$$a \in A,$$

si $a$ es un **elemento**, $A$ es un **conjunto**, y $a$ es uno de los elementos que componen el conjunto $A$.

Decimos que *a no pertenece* a $A$ y escribimos

$$a \notin A,$$

si $a$ es un **elemento**, $A$ es un **conjunto**, y $a$ no es uno de los elementos que componen el conjunto $A$.

Decimos que $A$ *está contenido* en $B$ o que $A$ es un subconjunto de $B$ y escribimos

$$A \subset B,$$

si $A$ es un **conjunto**, $B$ es un **conjunto**, y todo elemento de $A$ es un elemento de $B$, es decir,

$$a \in A \Rightarrow a \in B.$$

Observemos que siempre $A \subset A$.

Decimos que $A$ *no está contenido* en $B$ o que $A$ no es un subconjunto de $B$ y escribimos

$$A \not\subset B,$$

si $A$ es un **conjunto**, $B$ es un **conjunto**, y existe algún elemento de $A$ que no es elemento de $B$.

Decimos que $A$ es *igual* a $B$ y escribimos

$$A = B,$$

si $A$ es un **conjunto**, $B$ es un **conjunto** y poseen los mismos elementos. Decir que dos conjuntos son iguales es equivalente a decir que se satisface la doble inclusión, es decir,

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ y } B \subset A.$$

**Observación** No nos interesa el orden en el que aparezcan los elementos de un conjunto ni la cantidad de veces que aparecen. En particular,

$$\{1, 3, 5\} = \{3, 5, 1\} = \{1, 1, 3, 5, 5, 5\}$$

**Ejemplo** Consideremos el conjunto $D$ del ejemplo anterior cuyo universo es el conjunto $\mathcal{U} = \{\text{Días de la semana}\}$, entonces tenemos que

$$\text{miércoles} \in D, \qquad \text{sábado} \notin D,$$

$$\{\text{miércoles}\} \subset D, \qquad \{\text{miércoles, jueves}\} \not\subset D.$$

Un conjunto distinguido es el *conjunto vacío*, éste es un conjunto que no posee elementos y se denota mediante el símbolo $\emptyset$. Dicho intuitivamente, un conjunto es como una "bolsa"que dentro tiene sus elementos. El conjunto vacío, es la bolsa vacía. El conjunto vacío también se denota como $\emptyset = \{\}$.

## Operaciones con conjuntos

Sean $A$ y $B$ conjuntos cualesquiera.

El conjunto *intersección* de $A$ y $B$ que se denota $A \cap B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ y a $B$ a la vez,

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$

El conjunto *unión* de $A$ y $B$ que se denota $A \cup B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a que pertenecen a $A$ o a $B$. La conjunción "o"en matemática no implica exclusividad, es decir, un elemento pertenece a $A$ o a $B$ si pertenece a $A$ pero no a $B$, o si pertenece a $B$ pero no a $A$, o si pertenece a $A$ y a $B$ a la vez,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

El conjunto *complemento* de $A$ en el universo $\mathcal{U}$ que se denota $A^c$ es el conjunto formado por todos los elementos del universo que **no** pertenecen a $A$,

$$A^c = \{x : x \in \mathcal{U} \text{ y } x \notin A\}.$$

El conjunto *diferencia* de $A$ y $B$ que se denota $A \setminus B$ es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a $A$ y que no pertenecen a $B$,

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ y } x \notin B\} = A \cap B^c.$$

**Ejemplo** Consideremos el conjunto $D$ del ejemplo anterior y el conjunto $F = \{\text{sábado, domingo}\}$, entonces tenemos que

$$F \cap D = \emptyset, \qquad F \cup D = \{\text{lunes, miércoles, sábado, domingo}\},$$

$$D^c = \{\text{martes, jueves, viernes, sábado, domingo}\}, \qquad D \setminus \{\text{lunes, sábado}\} = \{\text{miércoles}\}.$$

## Producto Cartesiano

Sean $A$ y $B$ conjuntos cualesquiera.

El *producto cartesiano* de $A$ y $B$ que se denota $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados como se define a continuación

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

**Ejemplo** Consideremos el conjunto $D$ del ejemplo anterior y el conjunto $A = \{1, 3, 5\}$, entonces tenemos que

$$A \times D = \{(1, \text{lunes}), (3, \text{lunes}), (5, \text{lunes}), (1, \text{miércoles}), (3, \text{miércoles}), (5, \text{miércoles})\},$$

$$D \times A = \{(\text{lunes}, 1), (\text{lunes}, 3), (\text{lunes}, 5), (\text{miércoles}, 1), (\text{miércoles}, 3), (\text{miércoles}, 5)\}.$$

Observar que $1 \notin A \times D$ así como lunes $\notin A \times D$.

**Observación** $A \not\subset A \times D$ y $D \not\subset A \times D$.

**Ejemplo** Consideremos el conjunto $A = \{1, 3, 5\}$, entonces tenemos que

$$A \times A = A^2 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}.$$

Observar que $1 \notin A^2$. Observar también que $(1, 3) \neq (3, 1)$ pues en un par ordenado sí importa el orden de los elementos.