CAPíTULO 4

LÓGICA

Uno de los procesos por los cuales adquirimos conocimiento es el proceso de razonamiento. A su vez, hay una variedad de modos o formas mediante las cuales razonamos o argumentamos a favor de una conclusión. Ciertas formas de razonamiento parecen mostrar que si se suponen ciertas premisas, entonces la conclusión se sigue necesariamente. A tales razonamientos se los ha denominado deductivos y forman el objetivo central de lo que clásicamente se ha denominado lógica.

En un sentido amplio, el término *lógica* hace referencia al estudio de todos los razonamientos, y en un sentido estricto ha estado circunscripto al estudio del razonamiento deductivo.

Cierto tipo de razonamiento deductivo se basa en la lógica proposicional. Lo que caracteriza a la lógica proposicional es que toma como unidades básicas a las proposiciones y que tiene en cuenta cómo se combinan entre ellas por medio de conectivos lógicos para formar argumentos válidos.

1. Proposiciones

Una *proposición* es una sentencia declarativa que puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez. También podríamos decir que una proposición es una sentencia que expresa una propiedad para un individuo o ente, o que expresa la validez de una relación entre individuos o entes. Por ejemplo:

- Hoy es sábado.
- Los triángulos tienen cuatro vértices.
- $25 + 24 = 49$.
- Juan va al trabajo en tren .

Las sentencias exclamativas, las interrogativas y las imperativas tales como:

¡Viva la patria!,

¿Está lloviendo?

Oprima la tecla $\langle$ *ENTER* $\rangle$

no son proposiciones puesto que no pueden ser declaradas como verdaderas o falsas.

La veracidad V o falsedad (F) de una proposición se llama *valor de verdad* y viene dada por algún criterio independiente de la proposición.

Algunas proposiciones parecieran tener distintos valores de verdad según el caso. Por ejemplo, si decimos: *Hoy es sábado*, es falsa de domingo a viernes y es verdadera los sábados. O por ejemplo, *Nalbandián ganó* depende de qué partido nos estemos refiriendo. Esto se debe a que en nuestro lenguaje coloquial hay una gran parte de la información que está implícita. La palabra *hoy* está indicando una fecha particular, aunque no se esté diciendo explícitamente cuál. Un titular en un periódico que diga *Nalbandián ganó*, se está refiriendo a un determinado partido.

2. Conectivos lógicos

En el cálculo proposicional se suelen utilizar letras minúsculas como p, q, r,... para simbolizar las proposiciones. Estos símbolos pueden modificarse o combinarse mediante conectivos lógicos dando lugar a *proposiciones compuestas*. Los conectivos lógicos que estudiaremos son la negación: $\neg$, la conjunción: $\wedge$, la disyunción: $\vee$, la disyunción exclusiva: $\underline{\vee}$, la implicación: $\Rightarrow$ y la doble implicación: $\Leftrightarrow$. La negación modifica *una* proposición y por lo tanto se dice que es *1-aria* o *unitaria*. Los otros se aplican a dos proposiciones y se los llama *2-arios* o *binarios*.

EJEMPLO 4.1. Consideremos las proposiciones p: "4 es positivo" y q: "$\sqrt{2}$ es racional". Algunas posibles combinaciones de p y q son:

$\neg p$: 4 **no** es positivo.

$p \wedge q$: 4 es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.

$\neg p \wedge q$: 4 **no** es positivo **y** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \vee q$: 4 es positivo **o** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \Rightarrow q$: Si 4 es positivo **entonces** $\sqrt{2}$ es racional.

$p \Leftrightarrow q$: 4 es positivo **si y sólo si** $\sqrt{2}$ es racional.

3. Negación

Si p es una proposición, simbolizamos con $\neg p$ a su negación.
La *negación* es una operación unitaria que se aplica a una proposición y tiene el efecto de revertir el valor de verdad. Esto es, si p es verdadera entonces $\neg p$ es falsa, y si p es falsa entonces $\neg p$ es verdadera.

EJEMPLO 4.2. Si p simboliza la proposición *estamos en la clase de Álgebra*, entonces $\neg p$ es *no estamos en la clase de Álgebra*.

En la siguiente tabla mostramos la relación entre los valores de verdad de p y $\neg p$:

p	$\neg\, p$
V	F
F	V

Una tabla de este tipo, en la que se listan simultáneamente los valores de verdad de la proposición p y la que resulta de aplicar un conectivo se llama *tabla de verdad*.

EJEMPLO 4.3. Consideremos la proposición

p: “10 es múltiplo de 5”.

Entonces el valor de p es V. Su negación debe ser una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, por lo tanto $\neg\, p$ debe expresar exactamente lo contrario a lo que expresa p:

$\neg p$: “10 no es múltiplo de 5”.

EJEMPLO 4.4. Consideremos la proposición

q : “Todos los perros son blancos”.

No debe confundirse la negación con decir algo diferente, por ejemplo

r : “Algunos perros son blancos”.

La proposición r no es la negación de q, puesto que si q es verdadera también r lo es.

Si decimos

s : “Ningún perro es blanco”

tampoco s es la negación de q, puesto que si existiera un único perro de color blanco y los demás fueran marrones, entonces tanto q como s serían proposiciones falsas.

La negación de q puede ser enunciada de la siguiente manera:

$\neg\, q$: “Algunos perros no son blancos”.

Así, si q es verdadera, $\neg q$ es falsa, mientras que si $\neg q$ es verdadera entonces q es falsa.

4. Conjunción

La *conjunción* es un conectivo que permite formar proposiciones compuestas a partir de dos o más proposiciones. Una conjunción de proposiciones es verdadera si y sólo si cada una de ellas es verdadera. Basta que un solo término de la conjunción sea falso para que toda la conjunción sea falsa. En castellano, normalmente la conjunción se expresa por medio de la ’y’, de comas o de una combinación de éstas, o palabras como ’pero’. Así, por ejemplo, la proposición compuesta *Córdoba tiene sierras y tiene ríos* es verdadera porque cada parte de la conjunción es verdadera. No ocurre lo mismo con la proposición *Córdoba tiene sierras y tiene mar*. Esta proposición es falsa porque Córdoba no tiene mar.

La siguiente tabla corresponde a la tabla de verdad de la conjunción:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

EJEMPLO 4.5. Si p es "algunas aves vuelan" y q es "el gato es un ave", entonces $p \wedge q$ expresa "algunas aves vuelan y el gato es un ave", que es obviamente falsa pues los gatos no son aves. Por otro lado la proposición $p \wedge \neg q$ que dice "algunas aves vuelan y el gato no es un ave" es verdadera pues es la conjunción de dos proposiciones verdaderas.

5. Disyunción

Existen dos operadores de disyunción: La *disyunción exclusiva o excluyente* y *la disyunción inclusiva o incluyente*.

La disyunción exclusiva de dos proposiciones es verdadera si sólo una de las proposiciones es verdadera, y la indicamos con el símbolo $\underline{\vee}$.

La disyunción inclusiva entre dos proposiciones es falsa sólo si ambas proposiciones son falsas y se indica con el símbolo $\vee$. En el lenguaje coloquial y en matemática es más frecuente el uso de la disyunción inclusiva, también llamada el "o inclusivo". A veces el contexto de una frase indica si la disyunción es excluyente o incluyente. Un ejemplo de disyunción de tipo inclusivo es:

"Los alumnos regularizan la materia si aprueban tres parciales o si aprueban dos parciales y tienen un 80 % de asistencia."

En este caso, los alumnos pueden cumplir cualquiera de los dos requisitos, o también cumplir los dos. Pero por ejemplo, si en un restaurante con menú fijo se nos dice que tenemos como postre 'helado o flan' normalmente no significa que podamos pedir ambos, siendo en este caso la disyunción exclusiva.

Frecuentemente y cuando no es claro en el contexto de la oración se indica que una disyunción es incluyente (excluyente respectivamente) terminando la frase con *o ambas* (respectivamente *pero no ambas*).

Las siguientes tablas resumen los valores de verdad de $p \ \underline{\vee}\ q$ y $p \vee q$:

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

6. Los conectivos y las operaciones entre conjuntos

Recordemos que la unión entre conjuntos se define como

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Dado que el nexo *o* no es excluyente, podemos utilizar la notación lógica y escribir

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

De manera análoga, la intersección entre dos conjuntos A y B se define como

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

A su vez, fijado un conjunto universal $\mathcal{U}$, el complemento de un conjunto A se define como

$$A^c = \{x \mid \neg(x \in A)\}.$$

7. Propiedades de la conjunción y la disyunción

Los conectivos lógicos binarios combinan, como su nombre lo indica, dos proposiciones. Para la disyunción y para la conjunción se cumple la *propiedad conmutativa*:

$$p \wedge q = q \wedge p, \qquad p \vee q = q \vee p \qquad \text{y} \qquad p \veebar q = q \veebar p.$$

Si combinamos tres o más proposiciones utilizando uno de estos conectivos, entonces no importa cuál es el orden en que se realicen las operaciones. Por ejemplo, la conjunción entre tres proposicones p, q y r:

$$p \wedge q \wedge r$$

puede efectuarse operando $(p \wedge q) \wedge r$ o $p \wedge (q \wedge r)$. Es decir, la conjunción y la disyunción son operaciones *asociativas*.

En cambio, si utilizamos dos o más conectivos distintos, no se cumple la asociatividad en todos los casos. Por ejemplo, la expresión

$$(p \wedge q) \vee r$$

indica que se efectúa primero $p \wedge q$ y luego la disyunción con r; mientras que en la expresión

$$p \wedge (q \vee r)$$

se efectúa la conjunción de p con $q \vee r$. Notemos por ejemplo que si $p = F$, $q = V$ y $r = V$, entonces $(p \wedge q) \vee r = V$ y $p \wedge (q \vee r) = F$, por lo tanto $(p \wedge q) \vee r \neq p \wedge (q \vee r)$.

Las siguientes propiedades pueden comprobarse construyendo las tablas de verdad correspondientes, y se dejan como ejercicio para el lector.

Propiedad asociativa

$$(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$$

Propiedad distributiva

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Leyes de Morgan

$$\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$$

8. Ejercicios

1. Evalúa cada proposición según los valores de verdad $p = F$, $q = V$, $r = F$.

   a) $p \vee q$

   b) $\neg\, p \vee \neg\, q$

   c) $\neg\, p \vee q$

   d) $p \vee \neg\,(q \wedge r)$

   e) $\neg\,(p \vee q) \wedge (\neg\, p \vee r)$

   f) $\neg p \wedge (q \vee r)$

2. En la columna de la izquierda hay una lista de proposiciones. Para cada una de ellas, indica si la correspondiente proposición a la derecha es o no su negación. Si no lo es, escribe correctamente la negación.

   a) El pizarrón es verde.

   b) 4 es múltiplo de 8.

   c) El conjunto A tiene un solo elemento.

   d) A es un conjunto vacío.

   e) $a \leq b$

   f) $a \geq b$

   g) $a < b \leq c$

   h) $a < b \leq c$

   i) $a \in A \cup B$

   j) $b \in A \cap B$

   k) $c \in A^c$

   l) $d \notin G^c$

   a) El pizarrón es negro.

   b) 4 no es múltiplo de 8.

   c) El conjunto A es vacío.

   d) A tiene al menos un elemento.

   e) $a > b$

   f) $a \leq b$

g) $a > b \geq c$

h) $a \geq b$ o $b > c$

i) $a \in A^c \cup B^c$

j) $b \in (A \cap B)^c$

k) $c \in A$

l) $d \in G$

3. Suponga que a, b y c son números reales. Represente en forma simbólica los enunciados dados tomando: $p : a < b$, $\quad q : b < c$, $\quad r : a < c$.
   a) $a < b < c$.
   b) $(a \geq b$ y $b < c)$ o $a \geq c$.
   c) No es cierto que $(a < b$ y $a < c)$.
   d) $($ No es verdad que $(a < b$ y $(a < c$ o $b < c)))$ o $(a \geq b$ y $a < c)$.
4. Suponiendo p y q verdaderos, y r y s falsos, indica los valores de verdad de las siguientes expresiones:
   a) $p \vee (q \wedge r)$
   b) $(p \wedge (q \wedge r)) \vee \neg((p \vee q) \wedge (r \vee s))$
   c) $(\neg(p \wedge q) \vee \neg r) \vee (((\neg p \wedge q) \vee \neg r) \wedge s)$
5. Compruebe a través de las tablas de verdad, las propiedades distributivas de la disyunción y de la conjunción, y las leyes de Morgan.

CAPíTULO 5

CUANTIFICADORES

1. Funciones proposicionales

Consideremos las siguientes proposiciones:

$$q\ :\ \text{El perro es un animal.}$$

$$r\ :\ \text{La rosa es un animal.}$$

$$s\ :\ \text{La vaca es un animal.}$$

Las tres proposiciones tienen en común el *predicado lingüístico* “es un animal”, y tienen diferente el *sujeto*. La frase “es un animal” está dando una propiedad del sujeto. Si escribimos:

$$x \text{ es un animal}$$

obtenemos una oración que no es una proposición dado que su valor de verdad dependerá del valor de x. Así, si a x le damos el valor $x =$ “El perro” obtenemos la proposición

El perro es un animal

que es verdadera, mientras que si a x le damos el valor $x =$ “La rosa” obtenemos la proposición

La rosa es un animal

que es falsa.

En este ejemplo, la frase

$$x \text{ es un animal}$$

es una es una *función proposicional*, y la variable x toma valores en un conjunto llamado *universo del discurso* . Entonces, las funciones proposicionales *no* son proposiciones, pero para cada valor que le demos a x obtenemos una proposición. A las funciones proposicionales las denotamos con una letra mayúscula seguida de la variable entre paréntesis. Por ejemplo:

$$P(x) : x \text{ es un animal.}$$

También podemos tener funciones proposicionales con más de una variable, por ejemplo

$$x \text{ es mayor que } y.$$

El valor de verdad en estos casos dependerá de los valores que tomen las variables x e y. Así, si $x = 0$ e $y = 3$, la proposición *0 es mayor que 3* es falsa, mientras que si $x = 4$ e $y = \pi$, la proposición *4 es mayor que* π es verdadera.

2. Cuantificadores

Los *cuantificadores* nos permiten construir proposiciones a partir de funciones proposicionales ya sea particularizando o generalizando. Ejemplifiquemos esto. Si consideramos la función proposicional

$$P(x) : x \text{ es mayor que } 0,$$

podemos particularizar esto diciendo:

Existe un número real que es mayor que 0,

o generalizarlo diciendo

Todos los números reales son mayores que 0.

Notemos que tanto en la particularización como en la generalización se especifica un conjunto en donde toma valores la variable, en este ejemplo el conjunto son los números reales.

Existe una notación específica para la particularización y la generalización:

$$\exists x \in \mathbb{R} \ \mid \ x > 0,$$

que se lee *existe un* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* x *es mayor que 0*; mientras que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x > 0$$

se lee *para todo* $x \in \mathbb{R}$ *se cumple que* x *es mayor que* 0.

El símbolo $\forall$ se llama *cuantificador universal* y el símbolo $\exists$ es el *cuantificador existencial*

Como ya lo hemos afirmado, un cuantificador transforma una función proposicional en una proposición, a la cual se le asigna un valor de verdad.

EJEMPLO 5.1. Consideremos la función proposicional $P(x)$: *2x es par*. Entonces la proposición

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P(n)$$

es decir, "para todo n natural se cumple que $2 \cdot n$ es par", es equivalente a enunciar

$$2 \cdot 1 \text{ es par y } 2 \cdot 2 \text{ es par y } 2 \cdot 3 \text{ es par y } 2 \cdot 4 \text{ es par y ....}$$

Por lo tanto esta proposición será verdadera si todas las proposiciones $P(n)$ son verdaderas, y será falsa si al menos una de ellas es falsa.

EJEMPLO 5.2. Dada la función proposicional

$$P(x)\text{: } x \text{ es un número mayor que } 1,$$

entonces la proposición

$$\forall x \in \mathbb{N},\ P(x)$$

nos está enunciando que cualquiera sea el número natural x, se cumple que x es mayor que 1. Por lo tanto la proposición es falsa ya que 1 es un número natural que no es mayor que 1, es decir, la proposición $P(1)$ es falsa. No importa que para todos los demás valores de x la proposición $P(x)$ sea verdadera.

Si aplicamos el cuantificador existencial y enunciamos

$$\exists x \in \mathbb{N} \ |\ P(x),$$

es equivalente a enunciar

1 *es mayor que 1* o 2 *es mayor que 1* o 3 *es mayor que 1* o 4 *es mayor que 1* o ...

y así siguiendo. Esta proposición es verdadera, pues al menos existe un número natural, por ejemplo el 3, para el cual se cumple $P(3)$ verdadero, es decir, 3 es mayor que 1.

Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
$$\forall x \in A,\ P(x)$$
es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para *todos* los $a \in A$.

Si $P(x)$ es una función proposicional, entonces la proposición
$$\exists x \in A \ |\ P(x)$$
es verdadera si y sólo si $P(a)$ es verdadera para *algún* $a \in A$.

3. Negación de cuantificadores

La negación de una proposición cuantificada es también una proposición, que a su vez puede describirse con un cuantificador. La proposición $p:\ (\forall x)P(x)$ es verdadera si y sólo si $P(x)$ es verdadero para todo x. Su negación es una proposición que es falsa siempre que p sea verdadera, y que es verdadera siempre que p sea falsa.

Luego $\neg\, p$ es la proposición que es verdadera si $P(x)$ es falsa para algún valor de x, y que es falsa si $P(x)$ es verdadera para todos los valores de x. Dicho de otro modo, es verdadera si $\neg P(x)$ es verdadera para algún valor de x, es falsa si $\neg P(x)$ es falsa para todos los valores de x. Luego

$$\neg\ (\forall x,\ P(x)) \equiv \exists x \mid \neg\, P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición *Todos los números son positivos* es: *existe un número que no es positivo*.

Análogamente, la negación de la proposición $\exists x \mid P(x)$ será verdadera si y sólo si $P(x)$ es falsa para todo x, y falsa si $P(x)$ es verdadera para algún x. Equivalentemente, $\neg(\exists x \mid P(x))$ es verdadera si $\neg P(x)$ es verdadera para todo x, y es falsa si $\neg P(x)$ es falsa para algún x. Luego

$$\neg(\exists x \mid P(x)) \equiv \forall x,\ \neg P(x).$$

Por ejemplo, la negación de la proposición *Existe un número que es primo* es la proposición: *Todos los números cumplen que no son primos*, o lo que coloquialmente es equivalente: *Ningún número es primo*.

4. Ejercicios

1. Para cada una de las siguientes proposiciones analice el valor de verdad de las mismas y escriba, en forma simbólica, su negación. Asuma que las variables toman valores en el conjunto de los números reales.

   a) $\exists x,\ 3 \cdot x - 2 = -4x + 1$
   b) $\forall x,\ 3 \cdot x - 2 \neq -4x + 1.$
   c) $\exists x \mid x^2 + x + 1 = 0$
   d) $\forall x,\ (x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1$
   e) $\exists x \mid x^2 + 1 \geq 0$
   f) $\forall x,\ x^2 + 3x + 2 = 0$
   g) $\exists x \mid x = -x$
   h) $\exists x \mid x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x+3) \cdot (x+1)$
   i) $\forall x,\ x + x = 0$
   j) $\forall x,\ (\exists y \mid x^2 + y^2 = (x+y)^2)$
   k) $\forall x,\ (\forall y,\ x + y = y + x)$
   l) $\exists x \mid (\forall y,\ x + y = 0)$
   m) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x = 2$
   n) $\exists x \in \mathbb{R},\ \frac{9}{8} < x < \frac{5}{4}$
   ñ) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq \frac{3}{2}$ o $x \geq \frac{8}{5}$

2. Escriba las siguientes frases con notación lógica y escriba también sus negaciones. Cuando use cuantificadores especifique los universos, utilice $\mathbb{R}$ si no se especifica ningún universo:
   a) Para toda $x > 0$, existe n en $\mathbb{N}$ tal que $n > x$ y $x > 1/n$.
   b) Para toda m, $n \in \mathbb{N}$ existe p en $\mathbb{N}$ tal que $m < p$ y $p < n$.
   c) Existe $u \in \mathbb{N}$ tal que $un = n$ para toda $n \in \mathbb{N}$.
   d) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m < n$.
   e) Para toda $n \in \mathbb{N}$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $2^m \leq n$ y $n < 2^{m+1}$.

CAPíTULO 6

OTROS CONECTIVOS

1. Condicional o implicación

Otra forma de conectar dos proposiciones p y q es diciendo: “si se cumple p entonces se cumple q”, es decir por medio de una implicación. Este conectivo lógico se llama *condicional* o *implicación* y se simboliza con $\Rightarrow$.

EJEMPLO 6.1. Supongamos que para regularizar cierta materia es necesario contar con el 80 % de asistencia. Entonces podemos conectar las proposiciones

p: “He regularizado la materia”,

q: “He asistido al 80 % de las clases”,

con el conectivo condicional $\Rightarrow$:

$p \Rightarrow q$: Si he regularizado la materia entonces he asistido al 80 % de las clases.

La proposición q en la implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es lo que se afirma que ocurre si se cumple la proposición p. También decimos que p es el *antecedente* y q es el *consecuente*. El condicional es verdadero si el antecedente p es falso, o si el antecedente y el consecuente son ambos verdaderos. La implicación o condicional $p \Rightarrow q$ es falsa sólo si p es verdadera y q es falsa.

La siguiente tabla corresponde a los valores de verdad de la implicación:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

En una implicación $p \Rightarrow q$, p es la *condición suficiente* para q y q es la *condición necesaria* para p. Es decir, es *suficiente* que ocurra p para que ocurra q, y *necesariamente* ocurrirá q si ocurre p.

A diferencia de los otros conectivos, la tabla de verdad del condicional no se condice con el uso que hacemos de este tipo de expresiones en el lenguaje natural. Por ejemplo, para el lenguaje cotidiano, la expresión: *Si llueve entonces Juan usa paraguas* pareciera que indica que si no llueve entonces Juan no usa paraguas. Es decir, no sería verdadera la proposición si el antecedente es falso y el consecuente verdadero. Sin embargo, para la lógica esto es verdadero.

Si $p \Rightarrow q$ es una implicación, entonces $q \Rightarrow p$ es la *recíproca*, $\neg p \Rightarrow \neg q$ es la *inversa* y $\neg q \Rightarrow \neg p$ es la *contrarrecíproca*. Las tablas de verdad para $q \Rightarrow p$, $\neg p \Rightarrow \neg q$ y $\neg q \Rightarrow \neg p$ son:

p	q	$q \Rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg p \Rightarrow \neg q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

p	q	$\neg q \Rightarrow \neg p$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Observemos que los valores de verdad de una implicación $p \Rightarrow q$ y de su contrarrecíproca $\neg q \Rightarrow \neg p$ son los mismos para todos los valores de p y q posibles, es decir, son *lógicamente equivalentes.*

Debemos notar que hay otras formas de expresar un condicional que no es necesariamente el *si ... entonces*. Los siguientes ejemplos también son condicionales de la forma $p \Rightarrow q$:

- *Viajo en taxi si estoy apurado.* (p : “Estoy apurado”, q : “Viajo en taxi”.)
- *Sólo si es sábado voy al cine.* (p : “Voy al cine”, q : “Es sábado”.)
- *Es suficiente que llueva para que me quede en casa.* (p : “LLueva”, q : “Me quedo en casa”.)

2. Bicondicional o doble implicación

Una proposición bicondicional será verdadera si y sólo si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. El bicondicional entre p y q se simboliza $p \Leftrightarrow q$ y se lee p *si y sólo si* q. El bicondicional $p \Leftrightarrow q$ puede pensarse también como la proposición compuesta

$$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

EJEMPLO 6.2. Supongamos que para aprobar un parcial de Álgebra la nota debe ser mayor que 4. Entonces con las proposiciones simples

p: “Apruebo un parcial”,

q: “La nota es mayor que 4”,

y el conectivo $\Leftrightarrow$ formamos la proposición compuesta

$p \Leftrightarrow q$: “ Apruebo un parcial si y sólo si la nota es mayor que 4”.

La siguiente tabla corresponde a la doble implicación $p \Leftrightarrow q$:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Es un ejercicio sencillo comprobar que esta tabla coincide con la tabla de verdad de $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

3. Argumentos y demostraciones

En las futuras clases de álgebra, análisis, y otras materias de nuestras carreras, veremos a menudo enunciados con el nombre de Teoremas, Lemas, Proposiciones, Corolarios, etc. Este tipo de enunciados afirman que dadas ciertas hipótesis se cumple una conclusión. Estos enunciados no son decretos ni leyes, sino que deben ser demostrados, y la demostración o prueba de los mismos hace uso de la lógica. Por ejemplo, si afirmamos que *si un número es múltiplo de 4 entonces es múltiplo de 2*, esto tiene como hipótesis que cierto número es múltiplo de 4, y como conclusión que el número es múltiplo de 2.

Para demostrar que la conclusión es cierta, se suelen usar uno de los siguientes caminos: la demostración directa o la demostración indirecta. La demostración directa es aquella que nos muestra que siempre que las hipótesis sean verdaderas se cumple que la conclusión lo es. Por ejemplo, si un número n es múltiplo de 4, es porque $n = 4 \cdot k$, para cierto entero k. Pero entonces $n = (2 \cdot 2) \cdot k$, y por la asociatividad del producto resulta $n = 2 \cdot (2 \cdot k)$, es decir que n es múltiplo de 2.

En la demostración indirecta o demostración por el absurdo se hace uso del hecho que la implicación $p \Rightarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg\, q \Rightarrow \neg\, p$. Es decir, se demuestra que siempre que el consecuente es falso también el antecedente lo es. Así, en nuestro ejemplo, deberíamos probar que si n no es múltiplo de 2 entonces tampoco es múltiplo de 4.

No es el objetivo de este curso *aprender a probar o a demostrar*, pero al menos dar una breve introducción sobre qué significa hacer la demostración o prueba de un teorema u otro enunciado, ya que muy pronto veremos muchos de estos casos y diversas formas de demostrar.

Por ejemplo, en los ejercicios y futuros exámenes, suelen aparecer preguntas del tipo: determine si el siguiente enunciado es verdadero o falso. Justifique su respuesta dando una prueba o un contraejemplo, según corresponda.

¿Qué significa esto?

Justificar dando una *prueba* significa dar una demostración directa o indirecta de lo que queremos probar; es decir, argumentar que a partir de las hipótesis y siguiendo un razonamiento lógico se puede llegar a la conclusión, o bien mostrar que si la conclusión no es cierta entonces alguna de las hipótesis no se cumple.

En cambio la justificación mediante un *contraejemplo* consiste en dar un ejemplo en el cual se cumplen las hipótesis pero no se cumple la conclusión.

Por ejemplo, ante la afirmación *si un número es natural entonces es par*, basta con notar que el número 3, que cumple con la hipótesis de ser natural, no es un número par. Este contraejemplo sirve para mostrar que la afirmación es falsa.

4. Combinación de proposiciones con conectivos lógicos

Utilizando los conectivos lógicos estamos en condiciones de formar proposiciones compuestas. Si no tenemos el cuidado de hacer un uso adecuado de los paréntesis podremos formar expresiones que son ambiguas e imposibles de interpretar. Por ejemplo

$$p \Rightarrow p \wedge q \Rightarrow r \tag{4.1}$$

puede ser interpretada como $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$ o como $(p \Rightarrow p) \wedge (q \Rightarrow r)$, o también hay otras posibilidades. Por lo tanto expresiones como (4.1) no son correctas y deben ser evitadas con un uso adecuado de paréntesis. Sin embargo, el exceso de paréntesis suele generar expresiones largas y difíciles de leer y, por lo tanto, se han creado reglas para eliminar algunos de ellos. Estas reglas son llamadas *reglas de prioridad* o *de precedencia*. Generalmente cada conectivo tiene una prioridad dada, y las conexiones con una prioridad más alta introducen una unión más fuerte que las conexiones con una prioridad más baja. La conexión $\neg$ tiene la prioridad más alta. Por ejemplo, la proposición $\neg p \vee q$ debe ser entendida como $(\neg p) \vee q$, y no como $\neg(p \vee q)$. En el caso de las conexiones binarias el orden de prioridades, de mayor a menor, es $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Pese a que la prioridad de $\wedge$ es mayor que la de $\vee$, suele no hacerse distinción entre ellos y escribir los paréntesis correspondientes para evitar confusiones. Lo mismo puede decirse de la relación entre $\Rightarrow$ y $\Leftrightarrow$. Veamos ejemplos donde se aplica el uso de las prioridades: $p \Rightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $p \Rightarrow (p \wedge q)$. La expresión $p \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge q$, debe ser interpretada como $(p \vee (\neg r)) \Leftrightarrow (p \wedge q)$. Pese a estas reglas algunas expresiones requieren el uso de paréntesis. Por ejemplo, la expresión (4.1) es ambigua, y debe distinguirse si se trata de $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \Rightarrow r$, o bien $p \Rightarrow ((p \wedge q) \Rightarrow r)$.

Ahora estamos en condiciones de evaluar el valor de verdad de cualquier proposición compuesta teniendo en cuenta los valores de verdad de las proposiciones que la componen y los conectivos lógicos.

EJEMPLO 6.3. Dar la tabla de verdad para $(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$.

p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \wedge \neg r$	$p \vee r$	$(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)$	$(p \Rightarrow q) \wedge [(q \wedge \neg r) \Rightarrow (p \vee r)]$
V	V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	F
V	F	F	F	F	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

5. Ejercicios

1. Sean p, q, r las proposiciones siguientes:

   p: " está lloviendo"

   q: "el sol está brillando"

   r: "hay nubes en el cielo".

   Traduzca lo siguiente a notación lógica, utilizando p, q, r y conectivos lógicos.

   a) Está lloviendo y el Sol está brillando".
   b) Si está lloviendo , entonces hay nubes en el cielo.
   c) Si no está lloviendo, entonces el Sol no está brillando y hay nubes en el cielo.
   d) El Sol está brillando si y sólo si no está lloviendo.
   e) Si no hay nubes en el cielo, entonces el Sol está brillando.

2. Sean p, q y r como en el ejercicio anterior. Traduzca lo siguiente a oraciones en español.

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow r$
   b) $\neg (p \Leftrightarrow (q \vee r)$
   c) $(p \Rightarrow r) \Rightarrow q$
   d) $\neg (p \Leftrightarrow (q \vee r))$
   e) $\neg (p \vee q) \wedge r$

3. Supongamos que todos los días que llueve Juan usa paraguas. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones puedes asegurar que son verdaderas y cuáles no puedes asegurar?
   a) Si llueve entonces Juan usa paraguas.
   b) Si Juan usa paraguas entonces llueve.
   c) Si Juan no usa paraguas entonces no llueve.
   d) Si no llueve entonces Juan no usa paraguas.
   e) Si no llueve entonces Juan usa paraguas.

4. Escriba la recíproca, la contrarrecíproca y la inversa de cada una de las siguientes implicaciones:
   a) Si 4 es par entonces $1 > 0$.
   b) $2 + 3 = 5$ si $1 + 1 < 3$.
   c) Si 4 es impar entonces $1 > 0$.
   d) Si $1 + 1 < 3$ entonces $2 = 4$.
5. Determine los valores de verdad de las siguientes proposiciones compuestas.
   a) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 8$.
   b) Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 8$.
   c) Si $2 + 2 = 4$ entonces $2 + 4 = 6$.
   d) Si $2 + 2 = 5$ entonces $2 + 4 = 6$.
6. Suponiendo que $p \Rightarrow q$ es falso, indica los valores de verdad para

   a) $p \wedge q$ *b*) $p \vee q$ *c*) $q \Rightarrow p$

7. Sabiendo que la proposición compuesta $(\neg q) \vee (q \Rightarrow p)$ es falsa, indique cuál es el valor de verdad de las proposiciones p y q.
8. Indique para qué valores de verdad de p y q resulta verdadera la proposición compuesta $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \Rightarrow p)$.
9. Para las siguientes proposiciones compuestas, elabore las tablas de verdad correspondientes:
   a) $\neg\,(p \wedge q)$
   b) $\neg\,(p \vee q)$
   c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee \neg\, q) \Rightarrow (p \wedge q)]$
   d) $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow (p \wedge \neg\, q)$
   e) $[(p \Leftrightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)] \Rightarrow (\neg\, q \wedge p)$
   f) $\neg\,(p \wedge q) \vee (r \wedge \neg\, p)$
   g) $(p \vee q) \wedge (\neg\, p \vee q) \wedge (p \vee \neg\, q) \wedge (\neg\, p \vee \neg\, q)$