3.7. DEFINICIÓN FORMAL DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL.

El punto de partida para la definición de un lenguaje formal es el establecimiento del alfabeto del lenguaje, todos los lenguajes comportan un conjunto finito de símbolos que permiten la formación de las estructuras del lenguaje, es decir, la formación de palabras oraciones, etc. El lenguaje natural, castellano en nuestro caso, considera un conjunto de símbolos (letras) mediante las cuales es posible construir las palabras y oraciones, las cuales contienen alguna información.

3.7.1. ALFABETO DEL LENGUAJE.

Constituyen el conjunto de símbolos que el lenguaje requiere, el lenguaje para una Lógica Proposicional requiere tres tipos de símbolos:

1. **Símbolos para proposiciones**.: llamados también letras proposicionales son codificaciones de proposiciones atómicas o frases declarativas simples. Se recomienda emplear letras minúsculas a partir de la letra p, por ejemplo p, q, r, s, ... para grupos pequeños y letras subindicadas para grupos grandes, por ejemplo p_1, p_2, p_3, p_4, ...

   Al conjunto de de símbolos para las letras proposicionales se las denota con la letra P.

   Por ejemplo:

   $$P = \{ p, q, r, s, t \}$$

2. **Símbolos para Conectivos lógicos**: elementos de conexión que permiten formar estructuras complejas del lenguaje: (negación) $\neg$; (disyunción) $\vee$; (conjunción) $\wedge$; (implicación) $\rightarrow$; (doble implicación) $\leftrightarrow$.

3. **Símbolos de paréntesis o de puntuación**: para el establecimiento de subestructuras y niveles de prioridad : (,)

Ej: p : Juan juega futbol.
r : Juan es bueno.
s : Pedro es bueno
t : Llueve

Observaciones:

- Los conjuntos 2. y 3. son comunes para todo lenguaje proposicional, es decir no cambian.
- El conjunto 1. varia de acuerdo al fenómeno o razonamiento que se esta modelando, es decir cada razonamiento proporciona un conjunto P diferente cuyas letras proposicionales codifican proposiciones diferentes aun cuando las letras sean las mismas.

Por ejemplo:

r_1 P={p, q, r, s, t}
r_2 P={p, q, r}
r_3 P={a, b, c, d, e, f, g}

Como el conjunto P es variable, por lo tanto el lenguaje proposicional a desarrollar esta en función del conjunto P y se lo denota como sigue: L(P)

3.7.2. SINTAXIS DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL:

Tomando como base el conjunto de símbolos del lenguaje (alfabeto) se debe establecer el conjunto de reglas para la obtención de formulas bien construidas (fbc) del lenguaje, porque la simple combinación de proposiciones y conectivas no garantiza la obtención de frases sintacticamente correctas..

Definición.- Las Formulas Bien Construidas (fbc) del lenguaje proposicional se definen recursivamente con la aplicación de las siguientes reglas:

1. Toda Letra Proposicional es una formula bien construida del lenguaje. A estas formulas se las denomina Formulas Atómicas.
2. Si A y B son fórmulas del lenguaje , entonces:

$\neg A$, $\neg B$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ también son fórmulas del lenguaje.

3. Son fórmulas del lenguaje únicamente las obtenidas con la aplicación de las reglas 1 y 2.

La descripción de estas tres reglas contempla una definición recursiva.

CASO BÁSICO: Regla 1.

PROCESO INDUCTIVO: Reglas 2 y 3

Ej: Dado el conjunto P de letras proposicionales: $P\{p, q, r, s\}$

Son formulas del lenguaje:

- p (formula atómica) por la regla 1.
- $\neg s$, $(p\rightarrow q) \wedge r$, $((p\rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow t$ (por la regla 2.)

El uso adecuado de paréntesis es muy importante para definir las sub estructuras del una formula.

Por lo tanto:

$p \wedge q \rightarrow r$ es diferente a $(p \wedge q) \rightarrow r$

El empleo del alfabeto del lenguaje y de las reglas sintácticas establecidas permiten formar proposiciones complejas que se las desglosa de la siguiente manera:

Proposiciones conjuntivas:

Las proposiciones conjuntivas surgen de la unión de dos proposiciones atómicas, que se denominarán componentes conjuntivos, y la alteración de la ubicación de los mismos no incide en la función de la conjunción, que es unir. La condición que hace una conjunción verdadera, es que ambos componentes conjuntivos sean verdaderos, en caso contrario la conjunción es falsa.

Así por ejemplo:

Locke y Hume son representantes del empirismo inglés $p \wedge q$

Los componentes conjuntivos son:

Locke es representante del empirismo inglés p
Hume es representante del empirismo inglés q

Descartes es racionalista, pero Hume es empirista $p \wedge q$

Donde :

p: Descartes es racionalista.
q: Hume es empirista.

Aunque Descartes es idealista, Hume es empirista $p \wedge q$

Donde :

p: Descartes es idealista.

q: Hume es empirista.

Proposiciones disyuntivas:

Las proposiciones disyuntivas surgen de la inclusión o no de dos alternativas. las proposiciones que las componen, se denominarán componentes disyuntivos, y como en el caso de la conjunción, la alteración de la ubicación de los mismos no incide en la función de la disyunción.

Así por ejemplo en la disyunción inclusiva:

- A menos que se tomen medidas, el Riachuelo seguirá contaminado.

p v q

donde:
p: se toman medidas.
q: el riachuelo seguirá contaminado.

- Las becas de investigación son para Francia y/o Alemania

p v q

donde:
p: las becas de investigación son para Francia.
q: las becas de investigación son para Alemania.

Un ejemplo de disyunción exclusiva:

- La tarifa aérea incluye un viaje de cabotaje o a Bariloche o a cataratas

p v q

donde:
p: la tarifa aérea incluye un viaje de cabotaje a Bariloche.
q: la tarifa aérea incluye un viaje a cataratas.

- O bien descartes es racionalista, o bien es empirista

$$p \vee q$$

donde:

p: Descartes es racionalista.
q: Descartes es empirista.

La condición que hace una disyunción verdadera, radica en que siempre al menos uno de los componentes sea verdadero. Solamente en la disyunción inclusiva también es verdadera cuando ambos componentes sean verdaderos, en caso contrario es falsa.

Se utilizará la disyunción inclusiva, para todos los ejemplos posteriores, en todos los casos de disyunción que se encuentren en las operaciones entre proposiciones y/o razonamientos.

Proposiciones condicionales:

las proporciones condicionales presentan una estructura muy peculiar, en la cual los elementos (antecedentes y consecuentes), que las componen no puedan alterar su ubicación, pues esto modificaría la función de la misma. En las proposiciones condicionales, la ubicación de las proposiciones que la componen (antecedentes y consecuente) se determina por la estructura misma. La única condición que hace un condicional falso, radica en el caso de un antecedente verdadero y un consecuente falso, por cuanto será verdadero en todos los otros casos. Así por ejemplo:

- Si los pasajes se reservan con tiempo, viajaremos en primera.

Antecedente p: Los pasajes se reservan con tiempo.
consecuente q: viajaremos en primera.

$$p \rightarrow q$$

- Viajaremos en primera, Si los pasajes se reservan con tiempo.

Consecuente p:viajaremos en primera.
Antecedente q: Los pasajes se reservan a tiempo.

$$q \rightarrow p$$

- Iremos al campo, Solo si hace buen tiempo.

  Antecedente p: hace buen tiempo.

  Consecuente q: Iremos al campo.

  $p \rightarrow q$

Cabe señalar, que este tipo de proposiciones condicionales se denominan también materiales, se caracterizan por tener los verbos en modo indicativo. Pero hay otro tipo de proposición condicional que se denomina contra fáctico y se caracterizan por tener verbos en modo subjuntivo, con lo cual no es posible determinar el valor de verdad de las proposiciones que lo componen, ya que éstas refieren a situaciones que no existen. Por lo tanto los condicionales contra fácticos exceden el ámbito de la lógica, y ésta no se ocupa de ellos. Así por ejemplo:

Si San Martín no se hubiera muerto, seguiría vivo.

A partir de lo visto en los ejemplos de proposiciones condicionales materiales, es importante tener en cuenta que: si bien la asignación de las letras proposicionales es arbitraria, en la simbolización de las proposiciones, sin embargo es conveniente seguir un orden determinado. Por lo tanto se sugiere que la adjudicación de las letras siga la secuencia de las mismas: p, q, r, s, t y en función del orden en que vayan apareciendo las proposiciones, una vez simbolizadas las proposiciones, se procede a abstraer la forma proposicional según lo indique la conectiva en cuestión. Así por ejemplo:

- Descartes es idealista, si Locke es realista y Hume es realista.

  P q r

  $(q \wedge r) \rightarrow p$ (1)

- Según Kant, si la intuición se constituye de materia y de forma,

  p q

  entonces la materia es la sensación y la forma es Espacio – tiempo.

  r s

$(p \wedge q) \longrightarrow (r \wedge s)$ (2)

En la simbolización correspondiente a las formas proposicionales compuestas, se utilizan los signos de puntuación tales como el paréntesis, corchete y llave, en el mismo sentido con que operan en las matemáticas, es decir, determinan el alcance de una operación, en este caso la operación, que se lleva a cabo por una conectiva.

En el ejemplo (1), el si indica el antecedente de la construcción principal que es el condicional, dicho antecedente, es a su vez una proposición compuesta conjuntiva, por lo tanto, el paréntesis nos indica el alcance de la conjunción y a su vez, el antecedente del condicional.

En el ejemplo (2), el si nos indica el antecedente – proposición conjuntiva – y el entonces nos indica el consecuente – proposición conjuntiva- en cada uno de ellos el paréntesis indica el alcance de la conjunción respectiva, y además determina el antecedente por un lado, y el consecuente del condicional, por el otro.
Otro aspecto que se debe tener en cuenta en la simbolización, es que cuando una proposición atómica se repite, también debe repetirse la letra proposicional adjudicada en la simbolización de la misma. Así por ejemplo:

O Descartes es idealista, o Descartes no es idealista.
p -p
p w -p

Proposiciones Bicondicionales:

Las proposiciones bicondicionales son las proposiciones construidas por la equivalencia (o mutua implicación) entre las proposiciones que la componen. Los componentes del bicondicional se denominan:

Componente izquierdo y componente derecho. Un bicondicional es un condicional doble, esto quiere decir, que la proposición bicondicional "p = q", es equivalente a la conjunción de dos condicionales, donde el antecedente del primero es consecuente del segundo, y el consecuente del primero es antecedente del segundo. La condición que hace una proposición bicondicional, verdadera, es que ambos componentes tengan el mismo valor de verdad, ya sea éste verdadero, o falso. Así por ejemplo:

- Ingresa a la facultad si y solo si aprueba el ciclo básico
  Componente izquierdo componente derecho
  P q
  $P \leftrightarrow q$

Bicondicional o doble implicación:

Si ingresa a la facultad, aprobó el ciclo básico. Y si aprueba el ciclo básico, ingresa a la facultad

P q q p

$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Así como en las proposiciones condicionales vimos que hay casos de condicionales contra fácticos, en las proposiciones bicondicionales también se dan las bicondicionales contra fácticas como por ejemplo:

Habría alcanzado el triunfo si y solo si se hubiera esforzado.

La lógica solo se interesa por las proposiciones bicondicionales materiales, y no se ocupa de las bicondicionales contra fácticas pues de éstas no es posible determinar su valor de verdad.

Como la definición de las reglas sintácticas contempla una definición recursiva o inductiva, entonces es posible aplicar la inducción para demostrar propiedades y conceptos acerca de las formulas del lenguaje.

INDUCCIÓN SOBRE FÓRMULAS.-

La definición inductiva de las reglas sintácticas permiten aplicar la inducción matemática para la demostración de propiedades del lenguaje, en este proceso puede existir mas de un caso básico.

Ejemplo: Definir una función para determinar el número de conectivos que aparecen en una fórmula 'A'

La función a definir es **numconect(-)** que da como resultado el numero de conectivos que tiene una formula arbitraria.

CASO BÁSICO.- Si A es una fórmula atómica.

numconect(A) = 0

Ya que una fórmula atómica está formada por una letra proposicional.

PROCESO INDUCTIVO.-

-Si A es de la forma $\neg B$

numconect(A) = 1+numconect(B)

-Si A es de la forma (B*C) donde * puede ser$\{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$entonces:

numconect(A)=1+numconect(B)+numconect(C)

SEGUIMIENTO DE LA FUNCION INDUCTIVA:

Sea la formula A = $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$

3

Numconect (¬**(p** ∧ **q)** → **r**) = 1+ numconect (¬**(p** ∧ **q)**) + numconect(**r**)

2 0

1 + numconect(**p** ∧ **q**)

1

1 + numconect(**p**) + numconect(q)

0 0

Numconect (¬**(p** ∧ **q)** → **r**) = 3

3.7.3. SEMANTICA DEL LENGUAJE PROPOSICIONAL.-

Si bien se tiene estructurado en conjunto de reglas de correcta escritura de las formulas del lenguaje, es con la semántica que se proporciona el significado y el valor de verdad que se asumirá para los procesos de validación de argumentos.

PROPÓSITO.-

El propósito de la semántica del lenguaje proposicional se puede resumir en los siguientes aspectos:

- Dar significado a los elementos del lenguaje.
- Definir el concepto de verdad.
- Definir el concepto de consecuencia lógica.

a) Definir el conjunto de significados.-

La definición de significados consiste en establecer el conjunto de posibles valores que pueden tomar las letras proposicionales y las formulas del lenguaje. La Lógica proposicional al ser parte del razonamiento matemático, contempla un conjunto de valores que puede ser Verdadero o Falso.

Conjunto de significados = {V , F } o {1 , 0}

Todas las letras proposicionales toman valor de dos posibles, es por este motivo que corresponde a una lógica bi- valente.

b) Definición semántica de conectivos.-

Se debe establece un r el significado de estructuras formadas por la relación de proposiciones atómicas y conectivos lógicos. Se lo muestra en las siguientes tablas:

Negación	
P	**$\neg$q**
V	F
F	V

		Disyunción	Conjunción	Implicación	Bi condicional
p	**q**	**$p \vee q$**	**$p \wedge q$**	**$p \rightarrow q$**	**$p \leftrightarrow q$**
V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	F
F	F	F	F	V	V

c) Letras Proposicionales:

Las letras proposicionales representan información diferente en función al fenómeno que se está representando. Es decir:

- Codificación de proposiciones (frases declarativas simples).
- Representan información.

Ej: Si Manuel juega fútbol y no estudia entonces reprobará el examen .

p : Manuel juega futbol.

q : Manuel estudia.

r : Reprueba el exámen.

Y su representación simbólica es:

$$(p \wedge \neg q) \rightarrow r$$

3.7.3.1. CONCEPTO DE VERDAD.-

Todo lo visto hasta este momento supone que no se ha establecido un valor de verdad para las diferentes letras proposicionales, es decir, las letras proposicionales solo son codificaciones de frases declarativas simples que pueden ser verdaderas o falsas, la definición del concepto de verdad se establece asignando valores de verdad a los elementos fundamentales del lenguaje, las letras proposicionales.

La asignación de valores de verdad a las letras proposicionales se lleva a cabo por medio de una función de asignación de valores de verdad, a esta función se la denomina función ‘a’.

Función de asignación de valores de verdad.

La función ‘a’ asigna valores de verdad al conjunto de letras proposicionales del lenguaje. Cada letra proposicional toma un valor de dos posibles, el universo o conjunto de significados se ha establecido previamente y esta formado por {Verdadero, Falso} y se denota como sigue:

$$a: \ p \rightarrow \{V,F\}$$

Ej: Sea P={p, q, r} el conjunto de letras proposicionales del lenguaje.

Se puede establecer las siguientes funciones de asignación de valores de verdad:

a_1= {p=V, q=F, r =V} Conjunto de significados

a_2= {p=F , q = F , r= V} V=1

. F =0

.

a_n= {p=V , q= V , r=v}

Observaciones:

- A una función de asignación de valores de verdad se las denomina también VALUACIONES.
- Si P contiene n letras proposicionales entonces se tiene 2^n valuaciones diferentes.
- Toda letra proposiocional toma 1 valor de 2 posibles.

3.7.3.2. INTERPRETACIÓN DE FÓRMULAS.-

Una valuación asigna valores de verdad a los elementos atómicos del lenguaje, letras proposicionales, sin embargo el lenguaje esta conformado por estructuras mas complejas llamadas formulas que representan información resultante de la combinación de letras proposicionales y conectivos lógicos. Por lo tanto es importante definir claramente la forma en que una estructura compleja, una formula, toma un valor de verdad determinado, a este proceso se lo denomina interpretación de formulas del lenguaje. En resumen la interpretación de formulas tiene por objetivo:

Determinar el valor de verdad de una fórmula para una valuación especifica.

Como se mostró en la definición de la Sintaxis del lenguaje proposicional, la definición de una formula contempla una definición inductiva, es decir, la construcción de una formula, tiene una definición recursiva, por lo tanto, la interpretación de formulas, para determinar su valor de verdad para una valuación especifica, se lo realiza por medio de una definición inductiva.

DEFINICIÓN INDUCTIVA PARA INTERPRETACIÓN DE FORMULAS.

Sea la Fórmula A. Una formula arbitraria del lenguaje proposicional.

Se define la función a(...) :El valor de verdad de ...

La función a() se aplica a un parámetro que es la formula que se quiere evaluar.

CASO BÁSICO.- Si A es una fórmula atómica.

a(A) = valor asignado por una función de asignación de valores de verdad (VALUACIÓN) a las letras proposicionales.

PROCESO INDUCTIVO.- Si A es de la forma $\neg B$:

$$a(A) = 1 - a(B)$$

-Si A es de la forma $(B \vee C)$

$$a(A) = \max(a(B), a(C))$$

-Si A es de la forma $(B \wedge V)$

$$a(A) = \min(a(B), a(C))$$

-Si A es de la forma $(B \rightarrow C)$

$$a(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } a(B) = 1 \text{ y } a(C) = 0 \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

-Si A es de la forma $(B \leftrightarrow C)$

$$a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a(B) = a(C) \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Ej: Determinar el valor de verdad de la siguiente fórmula:

$$A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$$

para a: {p=1 ; q=0; r=1}

primero el paréntesis interno:

$A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$

$a() = \max(a(p),a(q))$

$a() = \max(1,0)$

$A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow 1)$

Luego el paréntesis de la izquierda:

$A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow 1)$

$a() = \min(a(p),a(\neg q))$

$a() = 1\text{-}a(q)$

$a() = 1 - 0$

$a() = \min(1,1)$

$A = 1 \rightarrow (\neg r \rightarrow 1)$

Ahora el paréntesis de la derecha:

$A = 1 \rightarrow (\neg r \rightarrow 1)$

$a() = (1\text{-}a(r)) \rightarrow 1$

$a() = (1 - 1) \rightarrow 1$

$a() = 0 \rightarrow 1$

$a() = 1$

$A = 1 \rightarrow 1$

Finalmente:

$a(A) = 1$

Para la valuación establecida la formula es verdadera.

La determinación del valor de verdad de una formula para una valuación determinada aplicando la definición inductiva de la función es un poco larga, es por este motivo que se puede recurrir a procesos que simplifican dicha evaluación pero aplicando la función inductiva como sigue:

Se debe descomponer la formula en subformulas hasta encontrar elementos atómicos, es decir letras proposicionales en una estructura ramificada, donde en las ramas inferiores aparecen únicamente letras proposicionales y en función al valor que tienen estas, por medio de una asignación de valores de verdad, se procede a evaluar la formula de abajo hacia arriba.

$(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow (q \vee q)) = 1$

$p \wedge \neg q = 1$ $\quad$ $\neg r \rightarrow (p \vee q) = 1$

$p = 1$ $\quad$ $\neg q = 1$ $\quad$ $\neg r = 0$ $\quad$ $p \vee q = 1$

$q=0$ $\quad$ $r=1$ $\quad$ $p=1$ $\quad$ $q=0$

-De otro modo: Sin necesidad de descomponer en subformulas, únicamente se desarrolla la evaluación en función de los valores de verdad de las letras proposicionales:

$(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$

1 0 1 1 0

1 1 0 1

1 1

1

3.7.3.3. EVALUACIÓN SEMÁNTICA DE FORMULAS.

La evaluación semántica de formulas supone determinar el valor de verdad de la formula para todas las posibles valuación, es decir, se debe establecer el valor de verdad para todas las posibles combinaciones existentes. Este proceso se lo lleva a cabo por medio de tablas de verdad.

Normalmente una formula, por la definición inductiva en su construcción, contiene subformalas, es decir, esta formada por otras formulas mas simples, por lo tanto se debe establecer el valor de verdad , en forma gradual, de todas las subformulas hasta, finalmente, obtener la evaluación de la formula completa. La siguiente tabla ilustra este proceso:

$A = (p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$

p q R	$\neg q$	$\neg r$	$(p \vee q)$	$(p \wedge \neg q)$	$(\neg r \rightarrow (p \vee q))$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg r \rightarrow (p \vee q))$
1 1 1	0	0	1	0	1	1
1 1 0	0	1	1	0	1	1
1 0 1	1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1	1	1
0 1 1	0	0	1	0	1	1
0 1 0	0	1	1	0	1	1
0 0 1	1	0	0	0	1	1
0 0 0	1	1	0	0	0	1

<u>FÓRMULAVÁLIDA.-</u>

Es cuando para cualquier valuación el valor de verdad de la fórmula es V. (tablas de verdad).

La columna de la formula en la tabla de verdad es siempre 1 o V.

Estas formulas se denominan TAUTOLOGIA.

Ej: $((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$

P	Q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

FÓRMULA SATISFASCIBLE:

Una formula es satisfascible si es verdadera por lo menos para una valuación.
Estas formulas se llaman también CONTINGENCIA. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

$A = (p \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$

p q R	$\neg r$	$(p \vee q)$	$(\neg r \rightarrow (p \vee q)$	$(p \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$
1 1 1	0	1	1	1
1 1 0	1	1	1	1
1 0 1	0	1	1	1
1 0 0	1	1	1	1
0 1 1	0	1	1	0
0 1 0	1	1	1	0
0 0 1	0	0	1	0
0 0 0	1	0	0	0

FÓRMUAL INSATISFASCIBLE:

Una formula es insatisfascible si es falsa para cualquier valuación.
Estas formulas se llaman también CONTRADICCIÓN.

3.7.3.4. EVALUACIÓN SEMÁNTICA DE DEDUCCIONES.

Una deducción o razonamiento se compone de un conjunto de premisas, que es la información conocida respecto a algún fenómeno, y una conclusión, que es la información que se trata de obtener a partir del conjunto de premisas.

-Conjunto de premisas => lo conocido
-Conclusión: => lo que se quiere conocer.

$$\underbrace{\{p_1, p_2, p_3, \ldots\ldots\ldots\ldots,p_n\}}_{\sum} \Rightarrow Q$$

$$\sum \neq Q$$

La verdad de la conclusión se sigue a partir de la verdad del conjunto de premisas.
Si la conclusión se puede obtener a partir del conjunto de premisas, entonces se dice que la conclusión es consecuencia lógica del conjunto de premisas, en caso contrario se dice que la conclusión no es consecuencia lógica del conjunto de premisas.

CONSECUENCIA LÓGICA.-

Deducción:
Conjunto de premisas $\sum$
Conclusión Q

$\sum \Rightarrow Q$ Q es consecuencia logia de $\sum$
$\sum \neq Q$ Q no es consecuencia lógica de $\sum$

ARGUMENTO VÁLIDO.-

Un argumento es valido si Q es consecuencia lógica de ∑. A nivel semántico un argumento es valido cuando no existe ninguna valuación que haga simultáneamente verdadera al conjunto de premisas y falsa a la conclusión.

La demostración de la validez de un argumento a nivel semántico supone evaluar todas las formulas del conjunto de premisas y la conclusión, este proceso se lo realiza por medio de tablas de verdad, si en las diferentes valuaciones no existe ninguna fila (valuación) en la que todas las formulas, del conjunto de premisas, son verdaderas y la conclusión es falsa simultáneamente, entonces el argumento o deducción es valida en caso contrario el argumento no es valido. El siguiente ejemplo ilustra esta situación

Ej: Demostrar la validez del siguiente argumento:

"Un líquido es ácido si y solo si colorea de azul el papel tornasol rojo. Un líquido colorea de azul el papel tornasol rojo si y solo si contiene iones de hidrógeno libres. Por lo tanto, un líquido es ácido si y solo si contiene iones de hidrógeno libres."

1: letras proposicionales: en este punto se debe identificar el conjunto de letras proposicionales del lenguaje.

p: Un líquido es ácido.
q: Un líquido colorea de azul el papel tornasol rojo.
r: Un líquido contiene iones de hidrógeno libres.

El conjunto de letras proposicionales del lenguaje es:

P={p, q, r}

2: Fórmulas de lenguaje: A partir de las letras proposicionales identificadas en el paso anterior se debe construir las formulas del lenguaje, mediante las cuales se reproduce todo el argumento a nivel simbólico, se debe construir la base de conocimiento (el conjunto de premisas que es la información conocida) y la conclusión (que es la información que se desea obtener a partir de de la base de conocimiento):

- Un líquido es ácido si y solo si colorea de azul el papel tornasol rojo.

  $p \leftrightarrow q$
- Un líquido colorea de azul el papel tornasol rojo si y solo si contiene iones de hidrógeno libres.

  $q \leftrightarrow r$

La base de conocimiento o el conjunto de premisas a nivel simbólico es:

$$\sum = \{p \leftrightarrow q;\ q \leftrightarrow r\}$$

La conclusión es la siguiente:

- un líquido es ácido si y solo si contiene iones de hidrógeno libres.

  $p \leftrightarrow r$

$$Q = \{p \leftrightarrow r\}$$

3: Tablas de verdad: Se debe evaluar, tanto las formulas de la base de conocimiento y de la conclusión por medio de tablas de verdad:

P	**Q**	**r**	**p↔q**	**q↔r**	⇨ **P↔r**
1	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**

En la tabla se observa que las únicas filas (valuaciones) donde el conjunto de premisas son verdaderas son la fila 1 y fila 8, entonces solo debemos analizar estas filas y observar el valor de verdad de la conclusión para estas filas, como la conclusión para estas filas también es verdadera, entonces el argumento es valido. En el supuesto caso de que existiera un valor de verdad falso, para la conclusión, en una de estas dos filas entonces el argumento seria invalido.

Ejemplo: Demostrar la validez de la siguiente deducción:

"O Juan y José tienen la misma edad o Juan es mayor que José. Si Juan y José tienen la misma edad entonces Pedro y Juan no tienen la misma edad. Si Juan es mayor que José entonces Juan es mayor que Maria . Por lo tanto o Pedro y Juan no tienen la misma edad o Juan es mayor que Maria."

1: letras proposicionales:

p: Juan y José tienen la misma edad.
q: Juan es mayor que José.
r: Pedro y Juan tienen la misma edad
s: Juan es mayor que Maria.

2: fórmulas de lenguaje.

$\sum = \{ p \vee q \; ; \; p \rightarrow \neg r \; ; q \rightarrow s \}$

$Q = \{ \neg r \vee s \}$

3: Tablas de verdad

Como el conjunto de letras proposicionales contiene cuatro letras, entonces se tiene un total de 16 valuaciones diferentes.

p	**q**	**r**	**s**	**¬r**	**p ∨ q**	**p→ ¬r**	**q→s**	**¬r ∨ s**
1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	0	0	1
1	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1	0
1	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1

En la tabla de verdad al no existir ninguna valuación que haga simultáneamente verdadera al conjunto de premisas y falsa a la conclusión, entonces el argumento es valido, es decir, la conclusión es consecuencia lógica del conjunto de premisas.

Ejemplo: Demostrar la validez del siguiente argumento:

"O la lógica es difícil o no le gusta a muchos estudiantes. Si la matemática es fácil, entonces la lógica no es difícil. Por lo tanto, si a muchos estudiantes les gusta la lógica, la matemática no es difícil."

1: letras proposicionales:

p: La lógica es difícil

q: La lógica gusta a muchos estudiantes.

r: la matemática es fácil.

2: Fórmulas del lenguaje

$\sum = \{ p \vee \neg q \ ; \ r \rightarrow \neg p \}$

$Q = \{q \rightarrow r\}$

3: tablas de verdad:

P	**q**	**R**	**¬p**	**¬q**	**¬r**	**p ∨ ¬q**	**r→ ¬p**	**q→ r**
1	1	1	0	0	0	1	0	0
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
0	1	1	1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**
0	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**

De la misma forma que en los casos anteriores el argumento es Válido.

En alguno casos los argumentos no presentan en forma explicita los dos componentes fundamentales, es decir, la base de conocimientos y la conclusión, en estos casos, la conclusión a validar se la obtiene a base de consultas a la base de conocimientos, el siguiente ejemplo muestra una situación como esta.

Ejemplo: Formalizar en el lenguaje proposicional:

Manuel, Mauricio y Gabriel son acusados de fraude fiscal en el juicio ellos declaran lo siguiente:

Manuel: Mauricio es culpable y Gabriel es inocente.

Mauricio: Manuel es culpable solo si Gabriel es también culpable.

Gabriel : Yo soy inocente pero al menos uno de los otros es culpable.

1: letras proposicionales:

p: Manuel es inocente.

q: Mauricio es inocente.

r: Gabriel es inocente.

2: Fórmulas de lenguaje:

Las formulas del lenguaje se las obtiene a partir de los que dice cada uno de los acusados.

Manuel dice: $\neg q \wedge r$

Mauricio dice: $r \rightarrow p$

Gabriel dice: $r \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$$\sum = \{ \neg q \wedge r , \quad \neg r \rightarrow \neg p , r \wedge (\neg p \vee \neg q) \}$$

3: Contestar las siguientes preguntas:

a) Si todos son inocentes ¿Quien ha mentido?
b) Si se supone que todos dicen la verdad , ¿Quién es inocente y quien es culpable?

Por medio de tablas de verdad se puede establecer el valor de verdad respecto a lo que dice cada uno de los acusados y en función a los valores obtenidos se podrá respuesta a las interrogantes.

P	**q**	**R**	**¬p**	**¬q**	**¬r**	**Manuel** ¬q ∧r	**Mauricio** r→ p	**¬p ∨ ¬q**	**Gabriel** r ∧(¬p ∨ ¬q)
1	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	1	0

R.- a) Para dar respuesta a la primera interrogante, se observa que la primera fila es la valuación en la que todos son inocentes y de acuerdo a los valores obtenidos en la tabla de verdad los que han mentido son Manuel y Gabriel.

b) La tercera valuación es la valuación en la que todos dicen la verdad y rn este caso Mauricio es culpable.

3.7.3.5. TEOREMA DE LA CONSECUENCIA LÓGICA.-

1: Monotonía.-

Sea $\sum \in L(P)$; $\sum^* \in L(P)$: $Q \in L(P)$

Si $\sum \subseteq \sum^*$ y $\sum \Rightarrow Q$

Entonces : $\sum^* \Rightarrow Q$

Si se tiene una deducción valida ($\sum \Rightarrow Q$) la incorporación de nueva información a $\sum$ ($\sum^*$) no invalida la deducción.

Ej: $\sum = \{ (p \wedge q) \rightarrow \neg r \; ; \; q \rightarrow r \; ; \; r \vee q) \}$

$Q = \{p\}$