

## SOLUCIÓN EXAMEN MDL2 2016 – ESI BUCEO

### Ejercicio 1:

a)

El conjunto TERM de los términos correspondientes al lenguaje L queda definido inductivamente por:

i)  $c \in \text{TERM}$

ii)  $x_i \in \text{TERM} \forall i \in I$

iii) si  $t_1$  y  $t_2 \in \text{TERM}$ , entonces  $f(t_1, t_2) \in \text{TERM}$

El conjunto FORM de las fórmulas correspondientes al lenguaje L queda definido inductivamente por:

i)  $\perp \in \text{FORM}$

ii) si  $t_1$  y  $t_2 \in \text{FORM}$ , entonces  $t_1 = t_2 \in \text{FORM}$

iii) si  $\alpha$  y  $\beta \in \text{FORM}$ , entonces  $(\alpha \rightarrow \beta) \in \text{FORM}$

iv) si  $\alpha \in \text{FORM}$ , entonces  $(\neg\alpha) \in \text{FORM}$

v) si  $\alpha \in \text{FORM}$ , entonces  $(\forall x)\alpha \in \text{FORM}$

b)

swap : TERM  $\rightarrow$  TERM queda definida recursivamente por:

swap ( c ) = c

swap (  $x_i$  ) =  $x_i$ ,  $\forall i \in I$

swap (  $f(t_1, t_2)$  ) =  $f(\text{swap}(t_2), \text{swap}(t_1))$

c)

Se demostrará la propiedad, usando inducción en el conjunto  $\text{TERM}_c$ .

$P(t) := M \models t = \text{swap}(t)$

PB)  $P(c)$

$\leftrightarrow M \models c = \text{swap}(c)$

(def. swap)  $\leftrightarrow M \models c = c$

(def.  $\models$ )  $\leftrightarrow (c = c)^M = 1$

(def. val)  $\leftrightarrow c^M = c^M$

(def. val)  $\leftrightarrow 1 = 1$

PI) H)  $P(t_1) := M \mid = t_1 = \text{swap}(t_1)$

$P(t_2) := M \mid = t_2 = \text{swap}(t_2)$

T)  $P(f(t_1, t_2)) := M \mid = f(t_1, t_2) = \text{swap}(f(t_1, t_2))$

Dem:

$P(f(t_1, t_2))$

$\leftrightarrow M \mid = f(t_1, t_2) = \text{swap}(f(t_1, t_2))$

(def. swap)  $\leftrightarrow M \mid = f(t_1, t_2) = f(\text{swap}(t_2), \text{swap}(t_1))$

(def.  $\mid =$ )  $\leftrightarrow (f(t_1, t_2) = f(\text{swap}(t_2), \text{swap}(t_1)))^M = 1$

(def. val)  $\leftrightarrow (f(t_1, t_2))^M = (f(\text{swap}(t_2), \text{swap}(t_1)))^M$

(def. val)  $\leftrightarrow (t_1)^M + (t_2)^M = (\text{swap}(t_2))^M + (\text{swap}(t_1))^M$

$\leftrightarrow (t_1)^M = (\text{swap}(t_1))^M \text{ y } (t_2)^M = (\text{swap}(t_2))^M$

(def. val)  $\leftrightarrow (t_1 = \text{swap}(t_1))^M = 1 \text{ y } (t_2 = \text{swap}(t_2))^M = 1$

(por hip.)  $\leftarrow M \mid = t_1 = \text{swap}(t_1) \text{ y } M \mid = t_2 = \text{swap}(t_2)$

Entonces queda demostrado que para todo  $t \in \text{TERMC}$ , se cumple que  $M \mid = t = \text{swap}(t)$

**Ejercicio 2 (VESPERTINO) :**

Queremos hallar  $M_1$  tal que:

$M_1 \mid = (P(x,y) \wedge P(x,z)) \rightarrow y=z$  pero  $M_1 \not\mid = P(x,y) \rightarrow P(y,x)$

Veamos primero que:

$M_1 \mid = (P(x,y) \wedge P(x,z)) \rightarrow y=z$

(def.  $\mid =$  y cl.)  $\leftrightarrow M_1 \mid = (\forall x) (\forall y) (\forall z) ((P(x,y) \wedge P(x,z)) \rightarrow y=z)$

(2.4.5 y sust.)  $\leftrightarrow$  Para todo  $a \in \mid M_1 \mid$ , Para todo  $b \in \mid M_1 \mid$  y Para todo  $c \in \mid M_1 \mid, M_1 \mid = (P(a,b) \wedge P(a,c)) \rightarrow b=c$

(2.4.5)  $\leftrightarrow$  Para todo  $a \in \mid M_1 \mid$ , Para todo  $b \in \mid M_1 \mid$  y Para todo  $c \in \mid M_1 \mid$ , si  $M_1 \mid = P(a,b) \wedge P(a,c)$ , entonces  $M_1 \mid = b=c$

(2.4.5)  $\leftrightarrow$  Para todo  $a \in \mid M_1 \mid$ , Para todo  $b \in \mid M_1 \mid$  y Para todo  $c \in \mid M_1 \mid$ , si  $M_1 \mid = P(a,b)$  y  $M_1 \mid = P(a,c)$ , entonces  $M_1 \mid = b=c$

(def  $\mid =$ )  $\leftrightarrow$  Para todo  $a \in \mid M_1 \mid$ , Para todo  $b \in \mid M_1 \mid$  y Para todo  $c \in \mid M_1 \mid$ , si  $(P(a,b))^{M_1} = 1$  y  $(P(a,c))^{M_1} = 1$ , entonces  $(b=c)^{M_1} = 1$

(def val)  $\leftrightarrow$  Para todo  $a \in \mid M_1 \mid$ , Para todo  $b \in \mid M_1 \mid$  y Para todo  $c \in \mid M_1 \mid$ , si  $\langle a, b \rangle^{M_1} \in P^{M_1}$  y  $\langle a, c \rangle^{M_1} \in P^{M_1}$ , entonces  $b^{M_1} = c^{M_1}$

Veamos ahora que:

$$M_1 \models \neg (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

$$(2.4.5.) \leftrightarrow M_1 \models \neg (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

$$(\text{def } \models_{y \text{ cl.}}) \leftrightarrow M_1 \models (\forall x) (\forall y) \neg (P(x,y) \rightarrow P(y,x))$$

$$(2.4.5. \text{ y sust}) \leftrightarrow \text{Para todo } a \in |M_1|, \text{ Para todo } b \in |M_1|, M_1 \models \neg (P(a,b) \rightarrow P(b,a))$$

$$(2.4.5.) \leftrightarrow \text{Para todo } a \in |M_1|, \text{ Para todo } b \in |M_1|, M_1 \models \neg (P(a,b) \rightarrow P(b,a))$$

$$(\text{eq.}) \leftrightarrow \text{Para todo } a \in |M_1|, \text{ Para todo } b \in |M_1|, \text{ si } M_1 \models P(a,b), \text{ entonces } M_1 \models \neg P(b,a)$$

$$(\text{def } \models) \leftrightarrow \text{Para todo } a \in |M_1|, \text{ Para todo } b \in |M_1|, \text{ si } P(a,b)^{M_1} = 1, \text{ entonces } P(b,a)^{M_1} = 0$$

$$(\text{def val}) \leftrightarrow \text{Para todo } a \in |M_1|, \text{ Para todo } b \in |M_1|, \text{ si } \langle a, b \rangle^{M_1} \in P^{M_1}, \text{ entonces } \langle b, a \rangle^{M_1} \notin P^{M_1}$$

Tomando  $M_1 = \langle \mathbb{N}, \text{Doble} \rangle$ , tal que  $\text{Doble}(a,b)$  es verdadero si  $a$  es el doble que  $b$  y falso en otro caso.

$M_1$  cumple ambas afirmaciones.

### Ejercicio 3:

\* (I $\exists$ ):  $x$  está libre para  $x$  en  $(\alpha \rightarrow)$

\*\* (I $\forall$ ):  $x$  no debe de pertenecer a  $FV(\alpha) \cup FV(\neg\beta)$

$$\frac{\frac{\frac{[\neg\beta]^3 \quad [\beta]^{5.2}}{\perp} \quad (E\perp)}{[(\neg\alpha \vee \beta)]^4 \quad [\neg\alpha]^{5.1} \quad \neg\alpha} \quad (E\vee)_{(5)}}{\neg\alpha} \quad [\alpha]^2 \quad (E\rightarrow)}{\perp} \quad (I\neg)_{(4)}}{\frac{\neg(\neg\alpha \vee \beta)}{(\forall x) \neg(\neg\alpha \vee \beta)} \quad (I\forall)^{**}}{[\neg(\forall x) \neg(\neg\alpha \vee \beta)]^1 \quad (\forall x) \neg(\neg\alpha \vee \beta)} \quad (E\neg)}{\perp} \quad (RAA)_{(3)}}{\beta} \quad (I\rightarrow)_{(2)}}{\alpha \rightarrow \beta} \quad (I\exists)^*}{(\exists x) (\alpha \rightarrow \beta)} \quad (I\rightarrow)_{(1)}}{\neg(\forall x) \neg(\neg\alpha \vee \beta) \rightarrow (\exists x) (\alpha \rightarrow \beta)}$$

#### Hipótesis:

$$(1) \neg(\forall x) \neg(\neg\alpha \vee \beta)$$

$$(2) \alpha$$

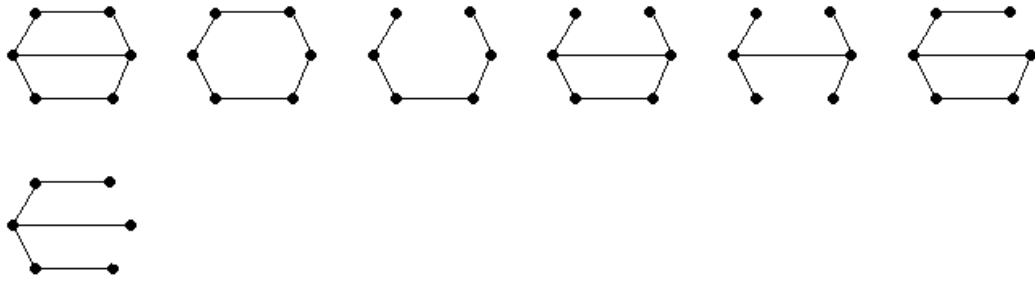
$$(3) \neg\beta$$

$$(4) (\neg\alpha \vee \beta)$$

$$(5.1) \neg\alpha$$

$$(5.2) \beta$$

**Ejercicio 4:**



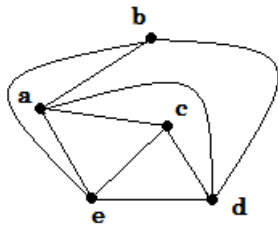
El grafo, tiene 7 subgrafos recubridores no isomorfos.

**Ejercicio 5:**

a) El teorema dice que un grafo no es plano si y solo si contiene un subgrafo homeomorfo a  $K_5$  o a  $K_{3,3}$

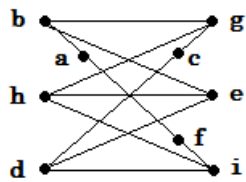
b) G1:

Es plano y su inmersión es



G2:

No es plano, ya que se puede hallar un subgrafo homeomorfo a  $K_{3,3}$ .



**G3:**

Es plano y su inmersión es

