

**Carrera de Tecnólogo en Informática**  
**Matemática Discreta y Lógica 2**  
**Examen**  
**Montevideo, Nocturno**  
**13/12/16**

**Instrucciones**

- Se leerá la letra y se tendrán **tres (3)** horas de realizar el parcial a partir de ese momento.
- El parcial es una prueba de carácter **individual** y no se puede consultar material
- Toda respuesta debe estar fundamentada
- El parcial suma **60 puntos**
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cedula de Identidad, escribir con lápiz y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas

**Ejercicio 1 (20 puntos)**

Sea  $L$  un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad  $\langle \cdot ; 2; 1 \rangle$  cuyo alfabeto cuenta con el símbolo '=', el símbolo de función  $f$ , el símbolo de constante  $c$ , los conectivos  $\neg$  y  $\rightarrow$ , el cuantificador universal  $\forall$ , las variables y los símbolos auxiliares habituales. Considere además la estructura  $M = \langle \mathbb{N}, +, 1 \rangle$ .

- a. Defina inductivamente el conjunto  $TERM$  de los términos y el conjunto  $FORM$  de las fórmulas correspondientes al lenguaje  $L$ .
- b. Defina una función  $swap: TERM \rightarrow TERM$  que intercambia los argumentos de cada símbolo de función  $f$ . Por ejemplo  $swap(f(c, f(x, y))) = f(f(y, x), c)$ .
- c. Demuestre inductivamente que para todo  $t \in TERM_C$ ,  $M \models t = swap(t)$  donde  $TERM_C$  es el conjunto de los términos cerrados.

**Ejercicio 2: (20 puntos)**

Sean  $\varphi \in FORM$ ,  $t \in TERM$  y  $x$  una variable cualquiera del lenguaje. Decimos que  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi$  si y sólo si se satisface alguna de las siguientes condiciones:

1.  $\varphi$  es atómica
2.  $\varphi = (\varphi_1 \square \varphi_2)$ ,  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi_1$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi_2$ , con  $\square \in \{\leftrightarrow, \rightarrow, \vee, \wedge\}$
3.  $\varphi = (\neg \varphi_1)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi_1$
4.  $\varphi = (\forall z)\varphi_1$  y
  - a. o bien  $x \notin FV((\forall z)\varphi_1)$
  - b. o bien  $z \notin V(t)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi_1$
5.  $\varphi = (\exists z)\varphi_1$  y
  - a. o bien  $x \notin FV((\exists z)\varphi_1)$
  - b. o bien  $z \notin V(t)$  y  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi_1$

Pruebe por inducción en FORM, utilizando la definición dada anteriormente, que si  $V(t) \cap BV(\varphi) = \emptyset$  (o sea, las variables de  $t$  no ocurren ligadas en  $\varphi$ ), entonces  $t$  está libre para  $x$  en  $\varphi$ .

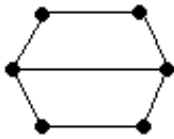
**Ejercicio 3:** (20 puntos)

Construya la siguiente derivación:

$$\vdash \neg (\forall x) \neg (\neg \alpha \vee \beta) \rightarrow (\exists x) (\alpha \rightarrow \beta)$$

**Ejercicio 4:** (20 puntos)

Hallar todos los subgrafos recubridores conexos no isomorfos del grafo de la figura.

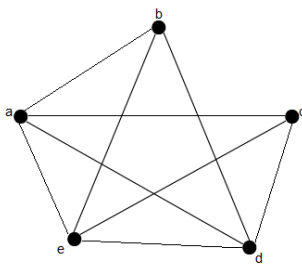


**Ejercicio 5:** (20 puntos)

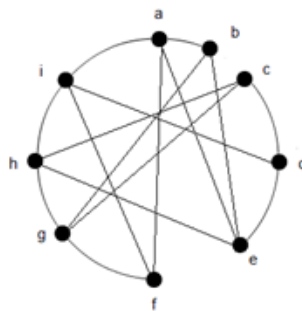
a) Enuncie el teorema de Kuratowsky

b) Determine si los siguientes grafos son planos. Si lo son dibuje su representación sin aristas solapadas. Si no lo es, justifique.

G1



G2



G3

