

Examen de MDL2

13 de Diciembre de 2016

Bosquejo de solución

Ejercicio 1 (13 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 2, 2; 1, 2; 1 \rangle$ con símbolos de predicado P y Q , símbolos de función f (unario), g (binario) y símbolo de constante c .

Sean A, B estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

$A = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, S, +, 0 \rangle$, donde $S(x) = x + 1$

$B = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, D, *, 1 \rangle$, donde $D(x) = 2 * x$

- Escriba (sin usar constantes extendidas) dos términos t_1, t_2 tal que $t_1^A = t_2^B$
- Aplique la siguiente sustitución: $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow (\forall y)Q(y, y))[g(z, y)/y]$.
- Demuestre por inducción que para todo término cerrado t (sin constantes extendidas) se cumple que $t^B = 2^{t^A}$.

Solución

i) $t_1 = f(c)$ y $t_2 = c$

Por definición de interpretación de términos

$$t_1^A = f(c)^A = S(c^A) = S(0) = 1$$

$$t_2^B = c^B = 1$$

ii) Por definición de sustitución $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow (\forall y)Q(y, y))[g(z, y)/y]$

=

$$(\forall x)(P(x, y)[g(z, y)/y] \rightarrow (\forall y)Q(y, y)[g(z, y)/y])$$

=

$$(\forall x)(P(x, g(z, y)) \rightarrow (\forall y)Q(y, y))$$

iii) $P(t) := t^B = 2^{t^A}$

PB) T) $P(t) := c^B = 2^{c^A}$

Dem) $c^B = 1 = 2^0 = 2^{c^A}$ usando las def de interpretación de términos, B y A.

PI1) HI) $P(t) := t^B = 2^{t^A}$

TI) $P(f(t)) := f(t)^B = 2^{f(t)^A}$

Dem) $f(t)^B = D(t^B)$ def interpret. y def B

$D(t^B) = D(2^{t^A})$ HI

$D(2^{t^A}) = 2^{t^A+1} = 2^{S(t^A)}$ aritmética

$2^{S(t^A)} = 2^{f(t)^A}$ def interpret. y def A

PI2) HI1) $P(t_1) := t_1^B = 2^{t_1^A}$

HI2) $P(t_2) := t_2^B = 2^{t_2^A}$

TI) $P(g(t_1, t_2)) := g(t_1, t_2)^B = 2^{g(t_1, t_2)^A}$

Dem) $g(t_1, t_2)^B = (t_1^B) * (t_2^B)$ def interpret. y def B

$t_1^B * t_2^B = 2^{t_1^A} * 2^{t_2^A}$ HI

$2^{t_1^A} * 2^{t_2^A} = 2^{t_1^A+t_2^A} = 2^{g(t_1, t_2)^A}$ aritmética, def interpret, def A

CL) $(\forall t \in TERM_C)P(t)$

Ejercicio 2 (12 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1, 1, 2; 1; 0 \rangle$, con símbolos de relación P_1, P_2, P_3 y símbolo de función f_1 .

- Sea $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, Par, Impar, \leq, F \rangle$ la estructura de los naturales con las relaciones “ser par”, “ser impar”, “menor o igual”.

Proporcione sentencias φ_1 y φ_2 que formalicen las siguientes nociones:

- F es decreciente.
- F aplicada a impares devuelve pares, y recíprocamente, aplicada a pares devuelve impares.

Demuestre que las interpretaciones de φ_1 y φ_2 en \mathcal{N} se corresponden con las nociones anteriores.

- Encuentre una estructura \mathcal{M}_1 tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$ y $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$.

Solución

i) $(\forall x)(\forall y)(P_3(x, y) \rightarrow P_3(f_1(y), f_1(x)))$.

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x)(\forall y)P_3(x, y) \rightarrow P_3(f_1(y), f_1(x)) &\Leftrightarrow (2,4,5) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \bar{\forall}b \in \mathbb{N}, \mathcal{N} \models P_3(\bar{a}, \bar{b}) \rightarrow P_3(f_1(\bar{b}), f_1(\bar{a})) &\Leftrightarrow (2,4,5) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \bar{\forall}b \in \mathbb{N}, \mathcal{N} \models P_3(\bar{a}, \bar{b}) \Rightarrow \mathcal{N} \models P_3(f_1(\bar{b}), f_1(\bar{a})) &\Leftrightarrow (\text{Interpretación}) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \bar{\forall}b \in \mathbb{N}, a \leq b \Rightarrow f_1(\bar{b})^{\mathcal{N}} \leq f_1(\bar{a})^{\mathcal{N}} &\Leftrightarrow (\text{Interpretación}) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \bar{\forall}b \in \mathbb{N}, a \leq b \Rightarrow F(b) \leq F(a) & \end{aligned}$$

ii) $(\forall x)((P_1(x) \rightarrow P_2(f_1(x))) \wedge (P_2(x) \rightarrow P_1(f_1(x))))$

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \models (\forall x)((P_1(x) \rightarrow P_2(f_1(x))) \wedge (P_2(x) \rightarrow P_1(f_1(x)))) &\Leftrightarrow (2,4,5) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \mathcal{N} \models ((P_1(\bar{a}) \rightarrow P_2(f_1(\bar{a}))) \wedge (P_2(\bar{a}) \rightarrow P_1(f_1(\bar{a})))) &\Leftrightarrow (2,4,5) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \mathcal{N} \models (P_1(\bar{a}) \rightarrow P_2(f_1(\bar{a}))) \text{ y } \mathcal{N} \models (P_2(\bar{a}) \rightarrow P_1(f_1(\bar{a}))) &\Leftrightarrow (2,4,5) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, \mathcal{N} \models P_1(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{N} \models P_2(f_1(\bar{a})) \text{ y } \mathcal{N} \models P_2(\bar{a}) \Rightarrow \mathcal{N} \models P_1(f_1(\bar{a})) &\Leftrightarrow (\text{Interpretación}) \\ \bar{\forall}a \in \mathbb{N}, Par(a) \Rightarrow Impar(F(a)) \text{ y } Impar(a) \Rightarrow Par(F(a)) & \end{aligned}$$

iii) Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, Par, Impar, \leq, F \rangle$ donde $F(z) = 1 - z$.

Se tiene que la derivada $F'(z) = -1$ por lo tanto F es decreciente y que si z es par, $F(z)$ es impar y viceversa. Como se había demostrado que φ_1 y φ_2 modelan estas propiedades para los naturales, se tiene que $\mathcal{M} \models \varphi_1$ y $\mathcal{M} \models \varphi_2$.

Ejercicio 3 (12 puntos)

Demuestre que para dos fórmulas cualesquiera φ y ψ se cumple que:

Si (para toda estructura A del tipo adecuado ($A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi$)) entonces ($\models \varphi \Rightarrow \models \psi$).

Muestre que el recíproco no se cumple.

Solución

Ver teórico.

Ejercicio 4 (13 puntos)

Construya una derivación que pruebe que:

$$(\forall x)(\forall y)((f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x)) \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))$$

Solución

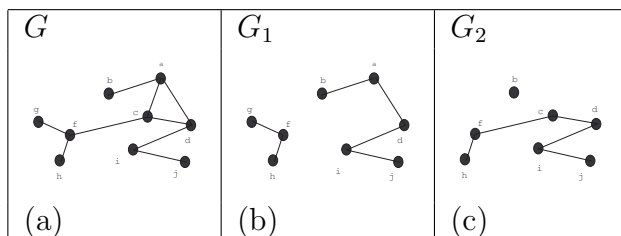
$$\frac{\frac{f(x) = f(x) \quad RI1}{f(x) = f(x) \wedge \neg P(f(x))} \quad [\neg P(f(x))]^2 \quad I\wedge}{\frac{(\forall x)(\forall y)((f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x)) \quad E\forall_{*3}}{(\forall y)((f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x))} \quad E\forall_{*2}}{\frac{(\forall y)((f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x)) \quad E\forall_{*2}}{(f(x) = f(x) \wedge \neg P(f(x))) \rightarrow \neg P(x)} \quad E\rightarrow} \quad \frac{[\neg P(f(x))]^2 \quad I\wedge}{\neg P(x)} \quad E\rightarrow}{\frac{P(f(x)) \quad \perp \quad RAA(2)}{P(f(x))} \quad I\rightarrow(1)}{\frac{P(x) \rightarrow P(f(x)) \quad I\rightarrow(1)}{(\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))} \quad I\forall_{*1}} \quad \frac{[P(x)]^1 \quad E\rightarrow}{[P(x)]^1} \quad E\rightarrow$$

*1 x no ocurre libre en $(\forall x)(\forall y)((f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x))$.

*2 f(x) está libre para y en $(f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x)$.

*3 x está libre para x en $(\forall y)(f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x)$.

Ejercicio 5 (12 puntos)



a) Sea G el grafo de la figura (a).

- i) Trace el subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.
- ii) Encuentre un subgrafo de G que no sea inducido.
- iii) Con respecto a G_1 y G_2 (figuras (b) y (c)), determine para cada uno si es subgrafo de G y en caso de serlo si es recubridor u inducido. Justifique.

b) Nombre cuatro propiedades de un grafo que sean de utilidad para identificar isomorfismos.

Solución

Parte a):

- i) Alcanza con quitar todas las aristas de G que no conecten a dicho conjunto de vértices.
- ii) Un ejemplo podría ser el subgrafo que resulta de quitar la arista c-a.
- iii) G_1 es inducido y no recubridor, G_2 es inducido y no recubridor.

Parte b): $|V|$, $|E|$, subgrafos (ciclos) y grado de vértices.

Ejercicio 6 (12 puntos)

a) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

b) Dado $G = (V, E)$ grafo no dirigido y sin lazos, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) G es un árbol.

ii) G es conexo, pero si se le elimina cualquier arista, G se desconecta en 2 subgrafos que son árboles.

iii) G no tiene ciclos y $|V| = |E| + 1$.

Solución

a) Para un árbol se tiene que $|V| = |E| + 1$ y según la letra tenemos que $|V| = 36 + x$. Por otra parte, también sabemos que:

$$E = \frac{16 + 40 + 4x}{2}.$$

Luego, $x = 7$ y el número de vértices del árbol es 43.

b) Ver teórico.

Ejercicio 6 (12 puntos)

En una reunión de 20 personas hay en total 48 pares de personas que se conocen.

Justificar por que hay al menos una persona que a lo sumo conoce a cuatro personas.

Solución

Cada persona la representamos por un vértice y los pares de personas conocidas por aristas. Si no hubiera ninguna persona con 4 o menos conocidos, todos los vértices del grafo tendrían grado 5 o más. Aplicando la fórmula de los grados tendríamos que:

$$2 * 48 = \sum_{v \in V} gr(v) \geq \sum_{v \in V} 5 = 5 * |V| = 5 * 20 = 100 \text{ lo cual es absurdo.}$$

Ejercicio 7 (14 puntos)

Decimos que un grafo $G = (V, E)$ es *Hamilton - Conexo* si y sólo si todo par de vértices $x, y \in V$, $x \neq y$ está conectado por un camino Hamiltoniano).

Probar que si G es Hamilton-Conexo y $|V| \geq 4$, entonces $|E| \geq \frac{3}{2}|V|$.

Sugerencia: Probar primero que $gr(v) \geq 3, \forall v \in V$.

Solucion

Demostraremos primero que $gr(v) \geq 3, \forall v \in V$. Dado un vértice v existen $x, y \in V$ con $x \neq v \neq y$, pues $|V| \geq 4$. Por definición existe un camino hamiltoniano conectando x con y . Luego, por ser hamiltoniano tiene que "pasar" por v y no puede repetir vértices por lo que necesariamente el $gr(v) \geq 2$.

Supongamos $gr(v) = 2$ y sean u, t los vértices adyacentes a v . Por definición de grafo Hamilton-Conexo existe un camino hamiltoniano comenzando en u (o en t) y finalizando en t (o en u).

Tomemos el primer caso (el segundo es análogo). El vértice v tiene que estar en el camino hamiltoniano considerado. Pero v es solo adyacente a u y t . Luego el camino ha de ser $u - v - t$. Por ser hamiltoniano allí están todos los vértices del grafo y entonces debe ser $|V| = 3$, lo cual contradice la hipótesis.

A partir de aquí tenemos que:

$2 * |E| = \sum_{v \in V} 3|V|$, por lo tanto $|E| \geq \frac{3}{2} * |V|$, como queríamos demostrar.