

# Examen de MDL2

13 de Diciembre de 2016

## Ejercicio 1 (13 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo  $\langle 2, 2; 1, 2; 1 \rangle$  con símbolos de predicado  $P$  y  $Q$ , símbolos de función  $f$  (unario),  $g$  (binario) y símbolo de constante  $c$ .

Sean  $A, B$  estructuras del mismo tipo definidas como sigue:

$A = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, S, +, 0 \rangle$ , donde  $S(x) = x + 1$

$B = \langle \mathbb{N}, \leq, \geq, D, *, 1 \rangle$ , donde  $D(x) = 2 * x$

- Escriba (sin usar constantes extendidas) dos términos  $t_1, t_2$  tal que  $t_1^A = t_2^B$
- Aplique la siguiente sustitución:  $(\forall x)(P(x, y) \rightarrow (\forall y)Q(y, y))[g(z, y)/y]$ .
- Demuestre por inducción que para todo término cerrado  $t$  (sin constantes extendidas) se cumple que  $t^B = 2^{t^A}$ .

## Ejercicio 2 (12 puntos)

Sea un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad  $\langle 1, 1, 2; 1; 0 \rangle$ , con símbolos de relación  $P_1, P_2, P_3$  y símbolo de función  $f_1$ .

- Sea  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, Par, Impar, \leq, F \rangle$  la estructura de los naturales con las relaciones “ser par”, “ser impar”, “menor o igual”.

Proporcione sentencias  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  que formalicen las siguientes nociones:

- $F$  es decreciente.
- $F$  aplicada a impares devuelve pares, y recíprocamente, aplicada a pares devuelve impares.

**Demuestre** que las interpretaciones de  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  en  $\mathcal{N}$  se corresponden con las nociones anteriores.

- Encuentre una estructura  $\mathcal{M}_1$  tal que  $\mathcal{M}_1 \models \varphi_1$  y  $\mathcal{M}_1 \models \varphi_2$ .

## Ejercicio 3 (12 puntos)

Demuestre que para dos fórmulas cualesquiera  $\varphi$  y  $\psi$  se cumple que:

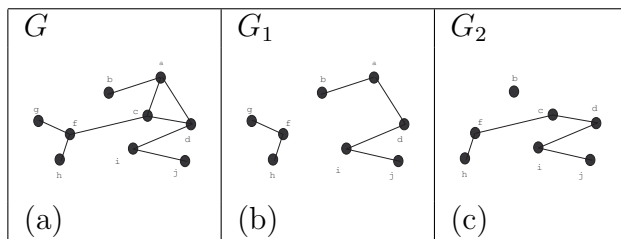
Si (para toda estructura  $A$  del tipo adecuado ( $A \models \varphi \Rightarrow A \models \psi$ )) entonces ( $\models \varphi \Rightarrow \models \psi$ ).

Muestre que el recíproco no se cumple.

## Ejercicio 4 (13 puntos)

Construya una derivación que pruebe que:

$(\forall x)(\forall y)((f(x) = y \wedge \neg P(y)) \rightarrow \neg P(x)) \vdash (\forall x)(P(x) \rightarrow P(f(x)))$



### Ejercicio 5 (12 puntos)

- a) Sea  $G$  el grafo de la figura (a).
  - i) Trace el subgrafo de  $G$  inducido por el conjunto de vértices  $U = \{b, c, d, f, i, j\}$ .
  - ii) Encuentre un subgrafo de  $G$  que no sea inducido.
  - iii) Con respecto a  $G_1$  y  $G_2$  (figuras (b) y (c)), determine para cada uno si es subgrafo de  $G$  y en caso de serlo si es recubridor u inducido. Justifique.
- b) Nombre cuatro propiedades de un grafo que sean de utilidad para identificar isomorfismos.

### Ejercicio 6 (12 puntos)

- a) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?
- b) Dado  $G = (V, E)$  grafo no dirigido y sin lazos, probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:
  - i)  $G$  es un árbol.
  - ii)  $G$  es conexo, pero si se le elimina cualquier arista,  $G$  se desconecta en 2 subgrafos que son árboles.
  - iii)  $G$  no tiene ciclos y  $|V| = |E| + 1$ .

### Ejercicio 6 (12 puntos)

En una reunión de 20 personas hay en total 48 pares de personas que se conocen. Justificar por que hay al menos una persona que a lo sumo conoce a cuatro personas.

### Ejercicio 7 (14 puntos)

Decimos que un grafo  $G = (V, E)$  es *Hamilton – Conexo* si y sólo si todo par de vértices  $x, y \in V, x \neq y$  está conectado por un camino Hamiltoniano ).

Probar que si  $G$  es Hamilton-Conexo y  $|V| \geq 4$ , entonces  $|E| \geq \frac{3}{2}|V|$ .

Sugerencia: Probar primero que  $gr(v) \geq 3, \forall v \in V$ .