

SOLUCIÓN EXAMEN JULIO 2017 MDL2

Ejercicio 1 (15 puntos)

- 1) a) $(\forall x)(P(c, x) \vee x = c)$
b) $(\forall x)(\forall y)(f(x, y) = f(y, x))$

2) El conjunto $TERM_c$ de L es el conjunto de los términos cerrados de L definido inductivamente por:

- i) $c \in TERM_c$
ii) Si $\alpha, \beta \in TERM_c$, entonces $f(\alpha, \beta) \in TERM_c$
iii) Si $\alpha, \beta \in TERM_c$, entonces $g(\alpha, \beta) \in TERM_c$

3) La función Q queda definida recursivamente como:

- $Q: TERM_c \rightarrow TERM_c$
 $Q(c) = c$
 $Q(f(\alpha, \beta)) = f(Q(\alpha), Q(\beta))$
 $Q(g(\alpha, \beta)) = f(Q(\alpha), Q(\beta))$

Ejercicio 2: (25 puntos)

- a) Esta sustitución no puede realizarse ya que $P_2(x_1)$ pertenece a $FORM$ y al conjunto de los términos $TERM$.
b) La afirmación se cumple si y solo si se cumple una de las siguientes:
i) $x_3 \notin FV((\exists x_2)(P_2(x_3) \rightarrow P_1(x_3, x_2)))$
ii) $x_2 \notin FV(f_1(x_1, x_2))$ y $f_1(x_1, x_2)$ esta libre para x_3 en $(P_2(x_3) \rightarrow P_1(x_3, x_2))$

Veamos si (i) se cumple:

$$\begin{aligned} & x_3 \notin FV((\exists x_2)(P_2(x_3) \rightarrow P_1(x_3, x_2))) \\ \xleftrightarrow{\text{def.FV}} & x_3 \notin FV((P_2(x_3) \rightarrow P_1(x_3, x_2)) - \{x_2\}) \\ \xleftrightarrow{\text{def.FV}} & x_3 \notin FV(P_2(x_3)) \cup FV(P_1(x_3, x_2)) - \{x_2\} \\ \xleftrightarrow{\text{def.FV}} & x_3 \notin FV(x_3) \cup FV(x_3) \cup FV(x_2) - \{x_2\} \\ \xleftrightarrow{\text{def.FV}} & x_3 \notin \{x_3\} \cup \{x_3\} \cup \{x_2\} - \{x_2\} \\ \xleftrightarrow{\text{arit}} & x_3 \notin \{x_3\} \end{aligned}$$

Lo anterior es absurdo, por lo que (i) no se cumple.

Veamos si (ii) se cumple:

$$x_2 \notin FV(f_1(x_1, x_2))$$

$$\xleftrightarrow{\text{def.FV}} x_2 \notin FV(x_1) \cup FV(x_2)$$

$$\xleftrightarrow{\text{def.FV}} x_2 \notin \{x_1\} \cup \{x_2\}$$

$$\xleftrightarrow{\text{arit.}} x_2 \notin \{x_1, x_2\}$$

Lo anterior es absurdo, por lo que (ii) no se cumple.

Como no se cumple ni (i) ni (ii) podemos decir que la sustitución no puede realizarse.

- c) La sustitución no puede realizarse ya que la expresión $(\forall x_1)(\neg(\exists x_2)(P_1(x_1, x_2) \wedge (P_2(f_2(x_1))))))$ no cumple con el tipo de similaridad con el que estamos trabajando. Mas precisamente, f_2 es binaria y en la expresión recibe solo un parámetro.
- d) La sustitución no puede realizarse ya que $f_1(x_1, x_3)$ es un término, es decir, no pertenece al conjunto de las variables.

Ejercicio 3: (20 puntos)

Construya la siguiente derivación:

$$\vdash (\exists y)(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\forall x)(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta)) \text{ tal que } y \notin FV(\alpha)$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{[(\forall x)(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta))]}{(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta))} \mathbf{13}}{\perp}{\neg\beta} \mathbf{10}}{\frac{[\neg\alpha]}{\perp} \mathbf{11}}{\neg\beta} \mathbf{10}}{\frac{[(\forall y)(\neg\beta)]}{\neg\beta} \mathbf{12}}{\perp} \mathbf{8}}{\frac{[(\alpha \wedge \beta)]}{\beta} \mathbf{9}} \mathbf{7}}{\frac{[(\alpha \wedge \beta)]}{\alpha} \mathbf{6}} \mathbf{5}}{\frac{[(\exists y)(\alpha \wedge \beta)]}{\neg\alpha} \mathbf{4}} \mathbf{3}}{\frac{[(\exists y)(\alpha \wedge \beta)]}{\perp} \mathbf{2}}{\neg(\forall x)(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta))} \mathbf{1}} \mathbf{1} \\
 (\exists y)(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\forall x)(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta))
 \end{array}$$

HIP:

- (1) $(\exists y)(\alpha \wedge \beta)$
- (2) $(\forall x)(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta))$
- (3) $(\alpha \wedge \beta)$
- (4) α

(5.1) $\neg\alpha$

(5.2) $(\forall y)(\neg\beta)$

Pasos:

1:(I \rightarrow), 2:(I \neg), 3:(E \exists), 4:(E \neg), 5:(I \neg), 6:(E \wedge), 7:(E \neg), 8:(E \vee), 9:(E \wedge), 10:(I \neg), 11:(E \neg),
12:(E \forall), 13:(E \forall)

3: $y \notin FV((\exists y)(\alpha \wedge \beta))$, $y \notin FV((\forall x)(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta)))$, $y \notin FV(\perp)$.

12: y está libre para y en $(\neg\beta)$

13: x está libre para x en $(\neg\alpha \vee (\forall y)(\neg\beta))$

Ejercicio 4: (20 puntos)

i) Un camino simple es un camino (secuencia finita alternada de vértices (v_1, \dots, v_n)) tal que existe una arista (v_i, v_{i+1}) para todo $1 \leq i \leq n - 1$ que no repite vértices.

Ej: A-C-F-b

ii) Un circuito es un camino cerrado (que empieza y termina en el mismo vértice) que no repite aristas.

Ej: A- H -B -A

iii) Un ciclo es un circuito simple con la convención de que se consideran el mismo ciclo, su inverso y cualquier rotación del mismo.

Ej: A-H-B-A

iv) Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo inducido de $G = (V, E)$, si $V' \subset V$ y si $v, w \in V'$ y

$(v, w) \in E$, entonces $(v, w) \in E'$.

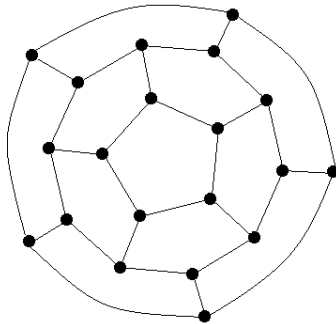
Ej: $G' = (V', E')$ con $V' = \{A, H\}$ $E' = \{(A, H)\}$

v) Un grafo $G' = (V', E')$ es un subgrafo recubridor de $G = (V, E)$ si $V = V'$ y $E' \subset E$

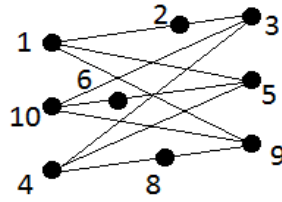
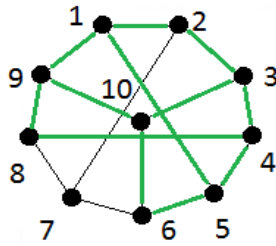
Ej: $G' = (V', E')$ con $V' = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ $E' = \{(A, H)\}$

Ejercicio 5: Op1 (20 puntos)

El G_1 es plano ya que puede hallarse una inmersión del mismo que es la siguiente:



El G_2 no es plano. Esto se debe a que podemos hallar un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ y eso por Teorema de Kuratowski es suficiente para asegurarnos que G_2 no es plano.



Ejercicio 5 Op2: (20 puntos)

1) $M_1 | = (\exists x)(x = ' f(x, y) \wedge y = ' g(x, y))$
 $\xleftrightarrow{\text{def}|=y \text{ clausura}}$ $M_1 | = (\forall y)(\exists x)(x = ' f(x, y) \wedge y = ' g(x, y))$
 $\xleftrightarrow{2.4.5.y \text{ sust}}$ Para todo $a \in | M_1 |$, $M_1 | = (\exists x)(x = ' f(x, a) \wedge a = ' g(x, a))$
 $\xleftrightarrow{2.4.5.y \text{ sust}}$ Para todo $a \in | M_1 |$, existe $b \in | M_1 |$ t.q. $M_1 | =$
 $(b = ' f(b, a) \wedge a = ' g(b, a))$
 $\xleftrightarrow{2.4.5.}$ Para todo $a \in | M_1 |$, existe $b \in | M_1 |$ t.q. $M_1 | = b = ' f(b, a)$ y M_1
 $| = a = ' g(b, a)$
 $\xleftrightarrow{\text{def}|=}$ Para todo $a \in | M_1 |$, existe $b \in | M_1 |$ t.q. $\forall (b = ' f(b, a))= 1$ y $\forall ($
 $a = ' g(b, a))=1$
 $\xleftrightarrow{\text{def val}}$ Para todo $a \in | M_1 |$, existe $b \in | M_1 |$ t.q. $b^{M_1} = f^{M_1}(b^{M_1}, a^{M_1})$ y $a^{M_1} =$
 $g^{M_1}(b^{M_1}, a^{M_1})$

Sea $M_1 = \langle \mathbb{N}, *, + \rangle$, podemos ver que M_1 cumple con la expresión.
 Es decir, si tomamos $b = 0$, a como cualquier natural posible, f como la operación multiplicación y g como la operación suma, es cierto que:
 Para todo $a \in | M_1 |$, existe $b \in | M_1 |$ t.q. $b^{M_1} = f^{M_1}(b^{M_1}, a^{M_1})$ y $a^{M_1} = g^{M_1}(b^{M_1}, a^{M_1})$.

2) $M_2 | \neq P1(x) \vee P2(x)$
 $\xleftrightarrow{\text{def}|=}$ $M_2 | = \neg(P1(x) \vee P2(x))$
 $\xleftrightarrow{\text{def}|=y \text{ clausura}}$ $M_2 | = (\forall x)(\neg(P1(x) \vee P2(x)))$
 $\xleftrightarrow{2.4.5.y \text{ sust}}$ Para todo $a \in | M_2 |$, $M_2 | = \neg(P1(a) \vee P2(a))$
 $\xleftrightarrow{\text{equivalencia}}$ Para todo $a \in | M_2 |$, $M_2 | = \neg(P1(a)) \wedge \neg(P2(a))$
 $\xleftrightarrow{2.4.5.}$ Para todo $a \in | M_2 |$, $M_2 | = \neg(P1(a))$ y $M_2 | = \neg(P2(a))$
 $\xleftrightarrow{2.4.5.}$ Para todo $a \in | M_2 |$, $M_2 | \neq P1(a)$ y $M_2 | \neq P2(a)$
 $\xleftrightarrow{\text{def}|=}$ Para todo $a \in | M_2 |$, $\forall(P1(a))= 0$ y $\forall(P2(a))=0$
 $\xleftrightarrow{\text{def val}}$ Para todo $a \in | M_2 |$, $a^{M_2} \notin P1^{M_2}$ y $a^{M_2} \notin P2^{M_2}$

Sea $M_2 = \langle \mathbb{IN}, \text{pares, negativos} \rangle$ siendo \mathbb{IN} el conjunto de los números impares naturales, siendo pares el conjunto de los pares y siendo negativos el conjunto de los reales negativos, podemos ver que M_2 cumple con la expresión.
 Es decir, si tomamos a^{M_1} como cualquier natural impar posible, $P1$ como el

predicado pares y g como el predicado negativos, es cierto que :
Para todo $a \in |M_2|$, $a^{M_2} \notin P1^{M_2}$ y $a^{M_2} \notin P2^{M_2}$