

**Carrera de Tecnólogo en Informática**  
**Matemática Discreta y Lógica 2**  
**Examen**  
**Montevideo, Vespertino**  
**13/07/17**

**Instrucciones**

- Se leerá la letra y se tendrán **tres (3)** horas de realizar el parcial a partir de ese momento.
- El parcial es una prueba de carácter **individual** y no se puede consultar material
- Toda respuesta debe estar fundamentada
- El Examen suma **100 puntos**
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cedula de Identidad, escribir con lápiz y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas

**Ejercicio 1 (20 puntos)**

Sea L un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad  $\langle 2; 2, 2; 1 \rangle$  cuyo alfabeto cuenta con el símbolo de igualdad '=', el símbolo de predicado P, los símbolos de funciones f y g y el símbolo de constante c. Considere además la estructura  $M = \langle \mathbb{N} - \{0,1\}, <, +, *, 2 \rangle$ .

1) Usando solamente los símbolos dados, escriba fórmulas de primer orden que definan las siguientes nociones:

- a) 2 es el mínimo
- b) La suma es simétrica (ej.  $2+3 = 3+2$ )

2) Defina inductivamente el conjunto  $TERM_c$  de L.

3) Defina la función recursiva  $Q: TERM_c \rightarrow TERM_c$  que convierte todos los símbolos de función en f.

Ejemplo:

$$Q(f(c, g(c, c))) = f(c, f(c, c))$$
$$Q(g(g(c, c), c)) = f(f(c, c), c)$$

**Ejercicio 2: (20 puntos)**

Considere un lenguaje de primer orden del tipo  $\langle 2,1,1; 2,2; 3 \rangle$  con símbolos de predicado  $P_1, P_2, P_3$  símbolos de función  $f_1, f_2$  y símbolos de constantes  $c_1, c_2, c_3$ . Verifique cuales de las siguientes afirmaciones son correctas y realice la sustitución cuando sea posible.

- a)  $P_2(x_1)$  libre para  $x_3$  en  $((\forall x_2)(P_2(x_2) \rightarrow P_2(x_3)))$
- b)  $f_1(x_1, x_2)$  libre para  $x_3$  en  $((\exists x_2)(P_2(x_3) \rightarrow P_1(x_3, x_2)))$
- c)  $f_2(x_2, x_3)$  libre para  $x_1$  en  $(\forall x_1)(\neg(\exists x_2)(P_1(x_1, x_2) \wedge (P_2(f_2(x_1))))))$
- d)  $f_2(x_1, c_1)$  libre para  $f_1(x_1, x_3)$  en  $((\exists x_1)c_1 = 'x_1)$

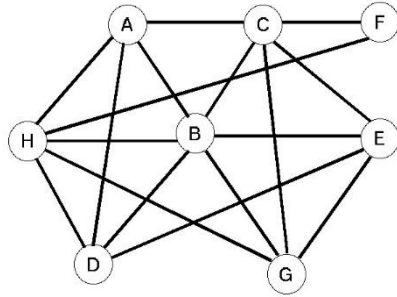
**Ejercicio 3:** (20 puntos)

Construya la siguiente derivación:

$$\vdash (\exists y) (\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg(\forall x) (\neg\alpha \vee (\forall y) (\neg\beta)) \text{ tal que } y \notin \text{FV}(\alpha)$$

**Ejercicio 4:** (20 puntos)

Sea  $G_1$  el grafo de la figura:



Defina los siguientes conceptos y **ejemplifíquelos** con el grafo  $G_1$ :

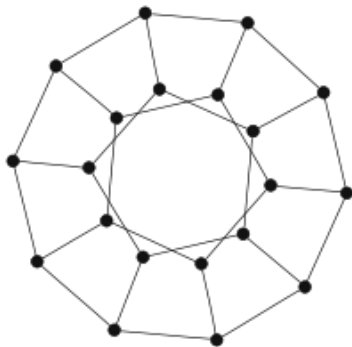
- i) camino simple
- ii) circuito
- iii) ciclo
- iv) subgrafo inducido
- v) subgrafo recubridor

**Ejercicio 5: (20 puntos)**

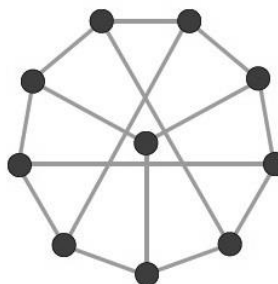
**Opción 1 :**

Determine si los siguientes grafos son o no planos. En caso de serlo, dibuje su inmersión, de lo contrario justifique.

G1



G2



**Opción 2:**

1) Considere un lenguaje de primer orden de tipo  $\langle -, 2, 2; 0 \rangle$  con símbolos de función  $f$  y  $g$ .

Halle una estructura  $M_1$ , tal que:

$$M_1 \models (\exists x)(x = f(x, y) \wedge y = g(x, y))$$

2) Considere un lenguaje de primer orden de tipo  $\langle -1, 1; -, 0 \rangle$ . Halle una estructura  $M_2$  tal que:

$$M_2 \models P1(x) \vee P2(x)$$