

Matemática Discreta y Lógica 2

Práctico 7

Ejercicio 1) Determine  $|V|$  para los siguientes grafos o multigrafos  $G$

1.  $G$  tiene nueve aristas y todos los vértices tienen grado 3.
2.  $G$  es regular con 15 aristas y todo vértice tiene grado 3.
3.  $G$  tiene 10 aristas con dos vértices de grado 4 y los restantes de grado 3.

Ejercicio 2) Si  $G = (V, A)$  es un grafo conexo con  $|A| = 17$  y  $\text{grad}(v) \geq 3$  para toda  $v \in V$ , cual es el máximo valor para  $|V|$ ?

Ejercicio 3) Si  $G$  es un grafo no dirigido con  $n$  vértices y  $a$  aristas, sea  $\delta = \min_{v \in V} \{\text{grad}(v)\}$  y  $\Delta = \max_{v \in V} \{\text{grad}(v)\}$ . Demuéstrese que  $\delta \leq 2(a/n) \leq \Delta$ .

Ejercicio 4) Sean  $G = (V, A)$ ,  $H = (V', A')$  grafos no dirigidos con  $f : V \rightarrow V'$  estableciendo un isomorfismo entre los grafos.

1. Demuéstrese que  $f^{-1} : V' \rightarrow V$  también es un isomorfismo para  $G$  y  $H$ .
2. Si  $a \in V$ , demuéstrese que  $\text{grad}(a)$  (de  $G$ ) =  $\text{grad}(f(a))$  (de  $H$ ).
3. Demuéstrese que el vértice  $a$  es aislado (colgante) en  $G$ , si y solo si  $f(a)$  es aislado (colgante) en  $H$ .

Ejercicio 5)

1. Hállese un ciclo de Euler para el grafo de la figura 1.
2. Si la arista  $\{d, e\}$  se elimina de este grafo, hallese un camino de Euler para el subgrafo resultante.

Ejercicio 6) Determine el (los) valores de  $n$  para el (los) que el grafo completo  $K_n$  tiene un ciclo de Euler. Para que valores de  $n$  tiene  $K_n$  un camino, pero no un ciclo de Euler?

Ejercicio 7) Sea  $G$  un grafo no dirigido sin lazos de  $n(\geq 3)$  vértices. Si  $G$  tiene un vértice de grado par, cuántos vértices de  $\overline{G}$  tienen grado par?

Ejercicio 8) Si  $G = (V, A)$  es un grafo o multigrafo dirigido, se define el *grado de entrada*  $\text{grad}^+(v)$  como el número de aristas incidentes en  $v$  y el *grado de salida*  $\text{grad}^-(v)$  como el número de aristas incidentes desde  $v$ . Demuéstrese que en cualquier grafo o multigrafo dirigido  $\sum_{v \in V} \text{grad}^+(v) = \sum_{v \in V} \text{grad}^-(v)$ .

Ejercicio 9)

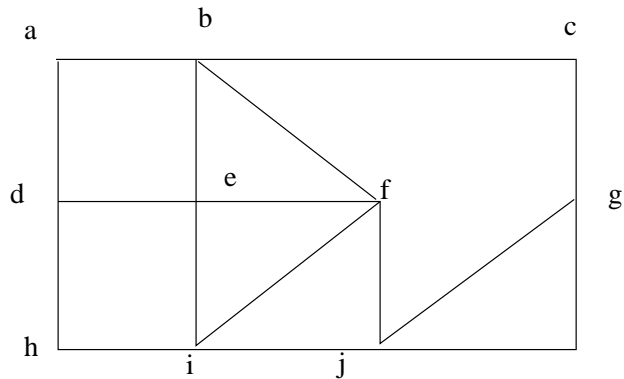


Figura 1:

1. Demuéstrase que un grafo o multigrafo dirigido  $G = (V, A)$  tiene un ciclo de Euler dirigido si y solo si  $G$  es conexo y  $grad^+(v) = grad^-(v)$  para  $v \in V$ .
2. Si  $G = (V, A)$  es un grafo o multigrafo dirigido, demuéstrase que  $G$  tiene un camino de Euler dirigido si y solo si
  - a)  $G$  es conexo
  - b)  $grad^+(v) = grad^-(v)$  para todos los vértices excepto el primero y el último
  - c)  $grad^-(x) = grad^+(x) + 1$  para el primer vértice
  - d)  $grad^+(x) = grad^-(x) + 1$  para el último vértice
3. Un grafo se denomina *fuertemente conectado* si existe un camino dirigido de  $a$  a  $b$  para todos los vértices  $a, b$ . Demuéstrase que si un grafo dirigido tiene un ciclo de Euler dirigido entonces es fuertemente conectado. Es cierto el recíproco?.