

5 - Propiedades simples de la Lógica de Predicados

Consideramos sentencias.

Consideramos un α arbitrario por lo que las pruebas valen para todo α .

Teorema 5.1

1. $\neg\forall x\varphi \leftrightarrow \exists x\neg\varphi$.

Demostremos $\alpha \models \neg\forall x\varphi \Rightarrow \alpha \models \exists x\neg\varphi$.

Dem. no para todo a $\varphi[\bar{a}/x]$ entonces existe un a $\neg\varphi[\bar{a}/x]$.

Recíproco: similar.

2. $\neg\exists x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\varphi$.

Demostremos $\alpha \models \neg\exists x\varphi \Rightarrow \alpha \models \forall x\neg\varphi$.

Dem. no hay ningún a que cumpla φ entonces para todo a se cumple $\neg\varphi$.

Recíproco: similar.

3. $\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$.

Demostremos $\alpha \models \forall x\varphi \Rightarrow \alpha \models \neg\exists x\neg\varphi$.

Dem. Si para todo a se cumple φ no existe ningún a que cumpla $\neg\varphi$.

Recíproco: similar.

4. $\exists x\varphi \leftrightarrow \neg\forall x\neg\varphi$.

Demostremos $\alpha \models \exists x\varphi \Rightarrow \alpha \models \neg\forall x\neg\varphi$.

Dem. hay un a que cumple φ entonces no para todo a se cumple $\neg\varphi$.

Recíproco: similar.

Teorema 5.2

1. $\forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \forall y\forall x\varphi$.

Demostremos $\alpha \models \forall x\forall y\varphi \leftrightarrow \alpha \models \forall y\forall x\varphi$.

Dem. para todo a se cumple que para todo b se cumple φ . a y b representan constantes cualesquiera. Es lo mismo que poner: para todo b se cumple que para todo a se cumple φ .

2. $\exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \exists y\exists x\varphi$.

Demostremos $\alpha \models \exists x\exists y\varphi \leftrightarrow \alpha \models \exists y\exists x\varphi$.

Dem. existe un a y existe un b tal que se cumple $\varphi[a, b]$. Es lo mismo que decir : existe un b y existe un a tal que se cumple $\varphi[a, b]$.

3. $\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$ cuando $x \notin FV(\varphi)$.

Demostremos $\alpha \models \forall x\varphi \leftrightarrow \alpha \models \varphi$.

Dem. Si a no ocurre en $FV(\varphi)$, $\varphi[\bar{a}/x] = \varphi$. Luego si se cumple φ se cumple $\forall x\varphi$ y viceversa.

4. $\exists x\varphi \leftrightarrow \varphi$ cuando $x \notin FV(\varphi)$.

Demostremos $\alpha \models \exists x\varphi \leftrightarrow \alpha \models \varphi$.

Dem. Si a no ocurre en $FV(\varphi)$, $\varphi[\bar{a}/x] = \varphi$. Luego si se cumple φ se cumple $\exists x\varphi$ y viceversa.

Teorema 5.3

1. $\forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$.

Demostremos $\alpha \models \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow \alpha \models (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$.

Dem. Para todo a se cumple φ y ψ . Entonces para todo a se cumple φ y para todo a se cumple ψ .

Recíproco. Si para todo a se cumple φ y para todo a se cumple ψ para todo a se cumplen ambos.

$$2. \exists x(\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \vee \exists x\psi).$$

Demostremos $\alpha \models \exists x(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \alpha \models (\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$.

Dem. hay un a que cumple φ o ψ . Supongo cumple φ entonces hay un a que cumple φ , supongo cumple ψ entonces hay un a que cumple ψ .

Recíproco. Supongo $(\exists x\varphi \vee \exists x\psi)$. Entonces se cumple alguno de los dos existe. Supongo se cumple $\exists x\varphi$ entonces hay un a que cumple φ luego dicho a cumple $\varphi \vee \psi$. Supongo se cumple $\exists x\psi$ entonces hay un a que cumple ψ luego dicho a cumple $\varphi \vee \psi$.

$$3. \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi(x) \vee \psi) \quad x \notin FV(\psi)..$$

Demostremos $\alpha \models \forall x(\varphi(x) \vee \psi) \Leftrightarrow \alpha \models (\forall x\varphi(x) \vee \psi)$.

Dem. Para todo a se cumple $\varphi[\bar{a}/x] \vee \psi$. Si para todo a se cumple $\varphi[\bar{a}/x]$ hemos probado $\forall x\varphi(x)$. Si no hay al menos un a que no cumple $\forall x\varphi(x)$, para dicho a se cumple ψ . Luego se cumple $\forall x\varphi(x) \vee \psi$.

Recíproco. Se que para todo a se cumple φ o si hay un a que no cumple φ se cumple ψ . Luego para todo a se cumple $\varphi(a) \vee \psi$.

$$4. \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi(x) \wedge \psi) \quad x \notin FV(\psi).$$

Demostremos $\alpha \models \exists x(\varphi(x) \wedge \psi) \Leftrightarrow \alpha \models (\exists x\varphi(x) \wedge \psi)$.

Dem. hay un a que cumple $\varphi(a)$ y también cumple ψ . Como ψ no depende de a sabemos se cumple ψ . También se cumple $\varphi(a)$.

Recíproco. Hay un a que cumple φ y además se cumple ψ . Luego hay un a que cumple $\varphi \wedge \psi$.