

Conceptos básicos de la Teoría de Grafos

1. Ciclos de Hamilton

Teorema 1.1 Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido sin lazos, con $|V| = n \geq 3$. Si $\text{grad}(x) + \text{grad}(y) \geq n$ para todo par de vértices x, y no adyacentes entonces G tiene un ciclo Hamiltoniano.

Demostración:

Supongamos G no tiene un ciclo Hamiltoniano. Agregamos aristas a G hasta obtener un subgrafo H de K_n tal que H no tiene ciclo hamiltoniano pero tal que al agregar cualquier arista e de K_n que no está en H , $H + e$ si tiene un ciclo Hamiltoniano.

Como $H \neq K_n$ existen vértices a y b en V tales que $\{a, b\}$ no está en H pero tal que $H + \{a, b\}$ tiene un ciclo Hamiltoniano C . Como H no tiene ciclo, la arista $\{a, b\}$ tiene que ser parte del ciclo. Enumeremos los vértices de H sobre el ciclo C . Obtenemos:

$$a(=v_1) \rightarrow b(=v_2) \rightarrow v_3 \dots \rightarrow v_n \rightarrow a$$

Consideremos $3 \leq i \leq n$. Si la arista $\{b, v_i\}$ está en H no puede estarlo $\{a, v_{i-1}\}$ pues si ambas lo están obtenemos el siguiente ciclo en H :

$$b(=v_2) \rightarrow v_i \rightarrow v_{i+1} \dots \rightarrow v_n \rightarrow a \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_{i-2} \rightarrow v_3 \rightarrow b(=v_2)$$

Por lo tanto para $3 \leq i \leq n$ como máximo una de las aristas $\{b, v_i\}$ o $\{a, v_{i-1}\}$ está en H . Luego

$$\text{grad}_H(a) + \text{grado}_H(b) < n$$

como además $\text{grad}_H(x) \geq \text{grad}(x)$ (en G) entonces

$$\text{grad}(a) + \text{grado}(b) < n$$

lo que contradice la hipótesis.

Corolario 1.2 Sea $G = (V, A)$ un grafo no dirigido sin lazos, con $|V| = n \geq 3$. Si $\text{grad}(x) \geq n/2$ para todo vértice x entonces G tiene un ciclo Hamiltoniano.

Demostración:

Consideremos dos vértices x, y cualesquiera (en particular pueden ser x e y no adyacentes).

Se cumple $\text{grad}(x) + \text{grad}(y) \geq n/2 + n/2 = n$. Aplicando el teorema anterior obtenemos que G tiene un ciclo Hamiltoniano.