

Lunes 30 de Noviembre de 2009

TECNÓLOGO INFORMÁTICO

2º PARCIAL DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA

Ejercicio 1.1

El número de pacientes que llega a un hospital sigue una distribución de Poisson. Si el número promedio es de 120 por hora, ¿cuál es la probabilidad de que en un minuto lleguen por lo menos 3 pacientes?

Solución:

1º- Establezco $X \geq 3$, porque el problema dice que hallemos la probabilidad de que por lo menos lleguen 3 pacientes en un minuto.

2º- Calculo λ , que es el número medio de veces que se da el suceso en una unidad de tiempo. Es la variable aleatoria de sucesos raros (media de pacientes que llegan en un minuto).

$$\lambda = 120/60 = 2 \text{ pacientes cada minuto}$$

3º- Calculo probabilidad de $X > r$, probabilidad de que ocurra r en una unidad de tiempo.
 $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] = 1 - [(2^0 * e^{-2})/0!] + (2^1 * e^{-2}/1!) + (2^2 * e^{-2}/2!) + (2^3 * e^{-2}/3!)] = 1 - 0'1353 - 0'2707 - 0'2707 - 0'180 = 0'1428$

4º- La probabilidad de que entren 3 pacientes cada minuto es del 14,28%.

Ejercicio 1.2

En el año 2005-06 en una granja de las proximidades de Zaragoza, el 80% de las cerdas en celo fueron inseminadas con éxito. ¿Cuál es la probabilidad de que inseminemos con éxito al menos a 3, si cogemos un grupo de 10 cerdas al azar?

Solución:

- Como nos dan la probabilidad de éxito, y el número de cerdas que vamos a inseminar, sabemos que se trata de una Distribución Binomial. $B(10, 0'8)$

- Por tanto sólo hemos de aplicar la fórmula, teniendo en cuenta que nos piden la probabilidad de éxito en al menos 3 cerdas inseminadas, es decir, la probabilidad de que tengamos éxito en más de tres cerdas. Aplicamos la fórmula de la Distribución Binomial en $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)] = 0.99$$

- Tenemos un 99% de probabilidad de que queden inseminadas más de 3 cerdas.

Ejercicio 1.3

La vida media de los habitantes de un país es de 68 años. Con una varianza de 25. Se hace un estudio en una pequeña ciudad de 10000 habitantes: a) ¿Cuántas personas superarán previsiblemente los 75 años?; b) ¿Cuántos vivirán menos de 60?

Solución:

a) ¿Cuántas personas superarán previsiblemente los 75 años?

1º- Cálculo $P(Z > 75)$

$$P(Z > 75) = 1 - P[X < (75-68)/5] = 1 - F_X(1,4) = 1 - 0,9192 = 0,0808$$

2º- El 8,08% de la población vivirá más de 75 años.

b) ¿Cuántos vivirán menos de 60?

1º- Cálculo $P(Z < 60)$

$$P(Z < 60) = P[X < (60-68)/5] = F_X(-1,6) = 1 - F_X(1,6) = 1 - 0,9452 = 0,0548$$

2º- Como el número que queda al tipificar es negativo, calculo el equivalente, que es igual a 1 menos la imagen del número.

3º- El 5,48% de la población no superará esa edad.

Ejercicio 1.4

Determinar p y k , para que $F(x)$ sea de Distribución

$$F(x) = 0 \text{ si } x < 0 ; F(x) = 1 - K(p-x) \text{ si } 0 \leq x < 1 ; F(x) = 1 \text{ si } x \geq 1$$

Solución:

Debe ser: a) en $x=0$ $Kp = 1$ y b) en $x=1$ $1 - K(p-1) = 1$ entonces $K(p-1) = 0$ por lo tanto la solución es $K = 1$ y $p = 1$.

Ejercicio 2.1

Supongamos que la duración en minutos de las llamadas telefónicas sigue una distribución dada por la función:

$F_X(x) = 1 - (e^{x/4}/4) - (e^{-x/4}/4)$, Hallar la probabilidad de que la duración de la llamada sea a) superior a 4 minutos; b) inferior a 3 minutos.

Solución:

Sea X una variable aleatoria con la distribución indicada en el enunciado que mide la duración (en minutos) de una llamada telefónica.

1. Se tiene que:

$$P(X > 4) = 1 - F_X(4) = 1 - 1 + (e^{4/4}/4) + (e^{-4/4}/4) = 0,7715$$

2. Por otra parte:

$$P(X < 3) = F_X(3) = 1 - (e^{3/4}/4) - (e^{-3/4}/4) = 0,3526$$

Ejercicio 2.2)

Las calificaciones de 500 aspirantes presentados a un examen para contratación laboral, se distribuyen normalmente con media 6,5 y varianza 4.

a) Calcule la probabilidad de que un aspirante obtenga más de 8 puntos.

b) Determine la proporción de aspirantes con calificaciones inferiores a 5 puntos.

c) ¿Cuántos aspirantes obtuvieron calificaciones comprendidas entre 5 y 7,5 puntos?

Solución:

a) Tenemos una $N(6,5 ; 2)$ entonces tipificando $P(Z > 0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 0,22663$

b) Se trata de calcular $P(Z < -0,75) = 1 - P(Z < 0,75) = 0,22663$ por lo tanto el 22,66% es la solución.

Ejercicio 2.3)

Un lote contiene 100 piezas de un proveedor de tubería local y 200 unidades de un proveedor de tubería del estado vecino. Si se seleccionan cuatro piezas al azar y sin reemplazo:

(a) ¿cuál es la probabilidad de que todas sean del proveedor local?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

(c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

SOLUCIÓN:

Sea X igual al número de piezas de la muestra del proveedor local. Entonces, x tiene una Distribución hipergeométrica y la probabilidad pedida es $P(x=4)$. Por consiguiente,

$$a) P(X=4) = (C(100,4) \cdot C(200,0)) / C(300,4) = 0,0119$$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que dos o más piezas de la muestra sean del proveedor local?

$$P(x \geq 2) = 0,0119 + (C(100,3) \cdot C(200,1)) / C(300,4) + (C(100,2) \cdot C(200,2)) / C(300,4) = 0,0119 + 0,098 + 0,298 = 0,408$$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una pieza de la muestra sea del proveedor local?

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x < 1) = 1 - (C(100,0) \cdot C(200,4)) / C(300,4) = 1 - 0,196 = 0,804$$

Ejercicio 2.4)

Supongamos que el número de imperfecciones en un alambre delgado de cobre sigue una distribución Poisson con una media de 2.3 imperfecciones por milímetro.

(a) Determine la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.

(b) Determine la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.

(c) Determine la probabilidad de al menos una imperfección en 2mm de alambre

Solución:

(a) Determine la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.

Entonces $E(x)=2.3$ y por lo tanto:

$$P(x=2) = ((e^{-2.3}(2.3)^2 / 2!)) = 0,265$$

(b) Determine la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.

Sea que X denote el número de imperfecciones en 5 milímetros de alambre. Entonces, X tiene una distribución Poisson con $E(x)=5\text{mm} \times 2.3 \text{ imperfecciones/mm} = 11,5 \text{ imperfecciones}$.

Por lo tanto:

$$P(x=10) = (e^{-11.5}(11.5)^{10} / 10!) = 0.113$$

(c) Determine la probabilidad de al menos una imperfección en 2mm de alambre.

Sea que x denote el número de imperfecciones en 2 milímetros de alambre. Entonces, X tiene una distribución de Poisson con

$$E(x)=2\text{mm} \times 2.3 \text{ imperfecciones/mm} = 4.6 \text{ imperfecciones}$$

Por lo tanto,

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x=0) = 1 - (e^{-4.6}(4.6)^0 / 0!) = 0.9899$$