Montevideo, Jueves 23 de Diciembre de 2010

Propuesta con soluciones

Ejercicio 1)

Parte a)

Una empresa electrónica observa que el número de componentes que fallan antes de cumplir 100 horas de funcionamiento es una variable aleatoria de Poisson. Si el número promedio de estos fallos es ocho:

1. ¿cuál es la probabilidad de que falle un componente en 25 horas?

2. ¿cuál es la probabilidad de que fallen no más de dos componentes en 50 horas?

3. ¿cuál es la probabilidad de que fallen por lo menos diez en 125 horas?

Soluciones:

Si α es una variable de Poisson, con valor medio $\lambda\alpha = 8$ que registra el número de componentes que fallan antes de las 100 horas, entonces μ es la variable aleatoria de Poisson que determina el número de fallas antes de las 25 horas, con parámetro $\lambda\mu = 8/4 = 2$, por tanto la solución de la parte 1 es $P(\mu = 1)$, siendo P la función de probabilidad de Poisson, cuyo resultado es 0,27067.
Para la parte 2, se considera la variable aleatoria δ con parámetro $\lambda_\delta = 8/2 = 4$, por tanto se trata de $P(\delta <= 2)$, siendo P la función de probabilidad de Poisson, lo que da: 0,2381.
Finalmente, sea ε con valor medio $\lambda_\varepsilon = 10$, se considera que $P(\varepsilon > 10) = 1 – P(\varepsilon < 10)$, lo que determina 0,41696.

Parte b)

Supóngase que la producción de un día de 850 piezas manufacturadas contiene 50 piezas que no cumplen con los requerimientos del cliente. Se seleccionan del lote dos piezas al azar y sin reemplazo. Sea la variable aleatoria X igual al número de piezas de la muestra que no cumplen. ¿Cuál es la función de distribución acumulada de X?

Soluciones:

La pregunta puede contestarse encontrando primero la función de masa de probabilidad de X.

$P(x=0)= (800/850)(799/849)=0,886$

$P(x=1)=2(800/850)(50/849)=0,111$

$P(x=2)=(50/850)(49/849)=0,003$

Por lo tanto,

$F(0)=P(x \leq 0)=0.886$

F(1)=P(x ≤ 1)=0.886+0,111=0,997

F(2)=P(x ≤ 2)=1

Parte c)

Una caja contiene 8 bombillos, de los cuales 3 están defectuosos. Se selecciona un bombillo de la caja y se prueba. Si este sale defectuoso se selecciona y se prueba otro bombillo, hasta que se escoja un bombillo no defectuoso. Encuentre el número esperado E de bombillos seleccionados.

Soluciones:

Escribiendo D para significar defectuoso y N para no defectuoso, el espacio muestral S tiene los cuatro elementos {N, DN, DDN, DDDN} con las probabilidades respectivas.

P(N) = 5/8 - P(DN) = 15/56 - P(DDN) = 5/56 - P(DDDN) = 1/56

El número X de bombillos escogidos es: X(N) = 1; X(DN) = 2; X(DDN) = 3; X(DDDN) = 4, por tanto su valor esperado es:

E(X) = 1.5/8 + 2.15/56 + 3. 5/56 + 4.1/56 = 3/2 = 1,5

Parte d)

En un dado bien construido consideramos los sucesos A y B, tales que A es la obtención de una puntuación mayor o igual que 4 y B la de 3 o 6. Utilizando los teoremas del cálculo de probabilidades, determínese si:

(a) Los sucesos de A y B son disjuntos.

(b) Los sucesos de A y B son independientes.

Soluciones:

Si los sucesos de A y B son disjuntos, se verificara que; $P(A \cap B) = 0$.

Obtendremos el suceso intersección $(A \cap B)$ = (4, 5, 6) ∩ (3, 6) = (6) cuya probabilidad es $P(A \cap B) = P(6) = 1/6 \neq 0$. Por tanto, A y B no son disjuntos.

Si los sucesos A y B son independientes $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A) = 3/6$ y $P(B) = 2/6$

Luego, $P(A) \cdot P(B) = 1/6 = P\ (A \cap B)$ *Por tanto,* los sucesos A y B son independientes.

Propuesta con soluciones

Ejercicio 2)

Parte a)

Calcúlense, en el juego del póker, las probabilidades siguientes:

(a) De póker.; (b) De full. (Se supondrá una baraja de cuarenta cartas.)

Soluciones:

A: Póker; B: Full, por tanto: P(A) = 10.36/40C5 = 0,000547; P(B) = 4C2.10.4C3.9/4C5 = 0,003283

Parte b)

Los pesos de 2.000 soldados presentan una distribución normal de media 65 Kg. y desviación típica 8 Kg. Calcula la probabilidad de que un soldado elegido al azar pese:

a) Más de 61 Kg.; b) Entre 63 y 69 Kg.; c) Menos de 70 Kg.; d) Más de 75 Kg.

Soluciones:

x es N (65, 8)

a) $P\ [x > 61] = P\ [z > (61 - 65)/8] = P\ [z > -0{,}5] = P\ [z < 0{,}5] = 0{,}6915$

b) $P\ [63 < x < 69] = P\ [-0{,}25 < z < 0{,}5] = 0{,}2902$

c) $P\ [x < 70] = P\ [z < 0{,}625] = 0{,}7357$

d) $P\,[x > 75] = P\,[z > 1,25] = 1 - P\,[z \leq 1,25] = 0,1056$

Parte c)

En un proceso de fabricación de tornillos se sabe que el 2% son defectuosos. Los empaquetamos en cajas de 50 tornillos. Calcula la probabilidad de que en una caja haya este número de tornillos defectuosos:

a) Ninguno; b) Uno; c) Más de dos.

Soluciones:

x es B (50; 0,02)

a) $P\,[x = 0] = 0,9850 = 0,364$

b) $P\,[x = 1] = 50 \cdot 0,02 \cdot 0,9849 = 0,372$

c) $P\,[x > 2] = 1 - P\,[x \leq 2] = 1 - (P\,[x = 0] + P\,[x = 1] + P\,[x = 2]) =$

$= 1 - (0,364 + 0,372 + 0,186) = 1 - 0,922 = 0,078$

Parte d)

Sea X una va continua cuya función de distribución es:

$$F(X) = \left|\begin{array}{l} 0 \text{ para } x <= 0 \\ x^3 \text{ para } 0 < x <= 1 \\ 1 \text{ para } x > 1 \end{array}\right.$$

Obtener la función de densidad.

<u>Soluciones:</u>

Como la función densidad es tal que es la derivada de la de distribución, entonces es:

$f(x) = 0$ para todo $x > 1$ y $<= 0$ y por otra parte, $f(x) = 3.x^2$ para $0 <= x < 1$

Prof. Espínola