Montevideo, Lunes 9 de Diciembre de 2013

# EXAMEN DE PROBABILIDAD Y ESTADISTICA PRÁCTICO

Ejercicio 1)

a) Indicar de los siguientes casos, cuales definen una VAD. En caso de que alguna no lo sea, indicar las razones que lo justifican.

1) $X_1$: {0, 1, 2, 3} con probabilidades $P_1$: {1/4, 1/16, 1/16, 2/4}

2) $X_2$: {0, 1,2} con probabilidades $P_2$: {1/2, 2/15, 8/15}

3) $X_3$: {0, 1} con probabilidades $P_3$: {k/2, (1- k/2)}

**Solución:**

***En el caso 1) las probabilidades asociadas a los valores de la variable $X_1$, son $\geq$ 0 y la suma de dichas probabilidades da 7/8, con lo cual NO se trata de una VAD.***

4) ***En el caso 2) las probabilidades asociadas a $X_2$, son $\geq$ 0, pero la suma de dichas probabilidades es 35/30 > 1, por lo tanto se trata de un caso en que NO se cuenta con una VAD.***

5) ***En el caso 3) al ser k un parámetro real, resulta claro que siempre que k sea < 0, se tendrían probabilidades asociadas a los valores de $X_3$, que NO son $\geq$ 0, por lo tanto el caso 3 tampoco es una VAD.***

b) Una empaquetadora automática se programa para producir paquetes de 500g. Un estudio concluye que el peso en gramos de un paquete de la producción es una variable aleatoria X normal de media 498 g. y varianza 16. Sabemos que producir un gramo de producto cuesta a la empresa 0.05 euros, mientras que lo vende a 0.09 euros. Llamemos B a la variable beneficio de la empresa por paquete vendido.

1) ¿Cuál es la probabilidad de que un paquete pese menos de 490 g?
2) Ídem. De que pese entre 490 g y 480 g.

3) Expresa la relación existente entre la variable B y la X. ¿Cuál es el beneficio promedio realizado por la empresa por paquete?
4) ¿Cuál es la proporción de paquetes entre la producción para los cuales la empresa tieneun beneficio mayor de 20 euros?

**Solución:**

**Sea X VAC con una Distribución N(498, 4) y Z con una N(0, 1)**

1) **$P(X \leq 490) = P(Z<-2) = 0{,}0228$**
2) **$P(480 \leq X \leq 490) = P(-4.5 \leq Z \leq -2) = P(Z \leq -2) - P(Z \leq -4.5) = 0{,}0228$**
3) **$B = (I - C)X = 0{,}04X$ entonces $E(B) = 0{,}04E(X) = 19{,}92$ y $Var(B) = 0{,}04^2 Var(X) = 0{,}0256$ por lo tanto B sigue una N(19,92, 0,16)**
4) **$P(B > 20) = P(Z > ½) = 0{,}3085$.**

c) Un examen tipo test consta de 15 preguntas, cada una con tres respuestas,de las cuales solo una es correcta. Si un alumno contesta al azar:

1) ¿Cuál es la probabilidad de que conteste bien 3 preguntas?
2) ¿Y la de que conteste bien más de 2 preguntas?
3) Calcula la probabilidad de que conteste mal a todas las preguntas.

**Solución:**

**El número de respuestas correctas X sigue una distribución binomial B(15; 1/3)**

1) **$P(X = 3) = C_3^{15}.(0{,}25)^3.(0{,}75)^{12} = 0{,}130$**
2) **$P(X> 2) = 1 - P(X \leq 3) = 0.920$**
3) **$P(X = 0) = (2/3)^{15} = 0.0023$**

Ejercicio 2)

a) El espesor de un recubrimiento conductor (en micrómetros) tiene una función de densidad dada por $f(x) = kx^{-2}$, $10 < x < 12$.

1) Obtén la función de distribución.
2) Calcula la probabilidad de que el espesor sea inferior a 11 μm
3) Calcula la probabilidad de que el espesor esté comprendido entre 11.5 y 11.8 μm.

Solución:

$$\int_{10}^{12}(k*x-2)dx=\left[k\frac{x^2}{2}-2x\right]_{10}^{12}=22k-4=1\Rightarrow k=\frac{5}{22}$$

La Función Distribución es:

1) 0 sii x < 10
2) $(5/22)*x^2/2 - 2x + 8.63$ sii 10 < x < 12
3) 1 sii x > 12

P(X<11) = F(11) = 0.38; P(11.5 < X < 11.8) = F(11.8) – F(11.5) = 0.194

b) Indica cuáles de las siguientes funciones puede ser función de densidad de una variable aleatoria continua. En el caso de que no lo sean da la razón. En caso de que lo sean, calcula la función de distribución.

1) F(x) = ¼ si x pertenece [0, 4] y F(x) = 1 en otro caso.
2) F(x) = 2.e^-2x, si x pertenece [0, +infinito) y F(x) = 0 en otro caso.

Solución:

La opción 1 claramente no es una función de densidad pues su integral en $[-\infty,+\infty]$, es divergente.

La opción 2 F(x) $\geq$ ***0*** $\forall$ ***x. Por otra parte*** $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ***= 2.*** $\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}dx$ ***= 2.(-1/2).*** $(\lim e^{-2x})_0^{+\infty}$ ***= 1por lo que se trata de una función de densidad y su función de distribución asociada es:***

$$G(X) = \begin{cases} 0 & \forall\ x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \forall\ x \geq 0 \end{cases}$$

c) En un cierto servicio telefónico, la probabilidad de que una llamada sea contestada en menos de 30 segundos es de 0.75. Suponga que las llamadas son independientes.

   a) Si una persona llama 10 veces, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 9 de lasllamadas sean contestadas en un espacio de 30 seg?
   b) Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 16 de lasllamadas sean contestadas en un espacio de 30 seg?
   c) Si una persona llama 20 veces, ¿cuál es el número de llamadas se espera que seancontestadas en menos de 30 seg?

Solución:

a) $C_9^{10}(0.75)^9(0.25) = 0.188$
b) 1 - $\sum_0^3 C_i^{20}(0.75)^i(0.25)^{20-i}$
c) 20*(0.75) = 15

Prof. Espínola