

Montevideo 30 de Noviembre de 2013

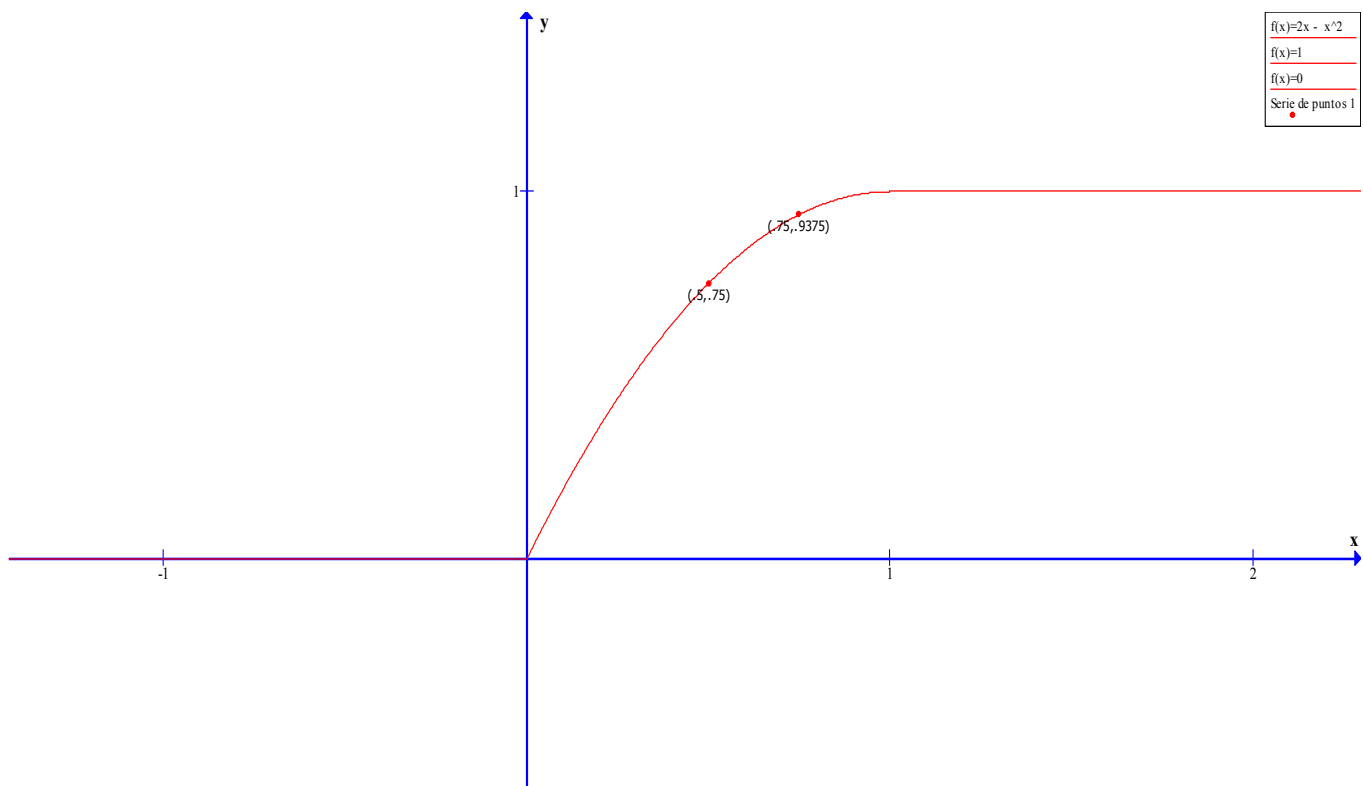
TECNÓLOGO INFORMÁTICO SOLUCIONES DEL 2º PARCIAL DE PYE

Parte a) La función de distribución de una VAC, está dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x < 0 \\ 2x - x^2 & \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \\ 1 & \Leftrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

- i) Representa $F(x)$
- ii) Calcula la $P(X < 1/2)$ y $P(X > 3/4)$
- iii) Determina $f(x)$
- iv) Calcula su Valor medio y su varianza

Gráfico de $F(x)$:



$P(X < 1/2)$ es $F(1/2)$ que da 0.75 como se observa en el gráfico y que se obtiene haciendo $x = 1/2$ en la función dada $2 \cdot (1/2) - (1/2)^2$.

De igual forma, $P(X > 3/4)$ es igual a $1 - P(X \leq 3/4)$, esta última se calcula igual que la primera y su valor como se observa en el gráfico es 0.9375, por lo que la $P(X > 3/4) = 0.0625$.

Para obtener la función de densidad sólo hay que derivar la función de distribución dada y se obtiene:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow x < 0 \\ 2 - 2x & \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \\ 0 & \Leftrightarrow x \geq 1 \end{cases}$$

Para calcular $E(X) = \int_0^1 x(2 - 2x)dx = \left[x^2 \right]_0^1 - \frac{2}{3} \left[x^3 \right]_0^1 = 1/3$. Análogamente para la $\text{Var}(X) = 1/18$.

Parte b) Una VAD, es una función definida en Ω Discreto, es decir finito o infinito numerable, sobre los Reales.

$\sum_0^n C_i^n p^i (1-p)^{n-i} = (p + (1-p))^n$, de acuerdo a la fórmula del desarrollo de las potencias de un binomio, pero $p + 1 - p = 1$ y $1^n = 1$, por lo tanto, se tiene una función de probabilidad.

Parte c)

$$\text{i) } \sum_0^2 C_i^{20} (0.2)^i (0.8)^{20-i}$$

$$\text{ii) } P(X=4) = C_4^{20} (0.2)^4 (0.8)^{16} = 0.218$$

$$\text{iii) } 1 - \sum_0^3 C_i^{20} (0,2)^i (0,8)^{20-i}$$

Parte d)

Como se trata de una Normal $N(50, 25)$ el valor medio es 50 y la varianza es 25, por lo tanto la desviación standard es 5. Como sabemos que en el intervalo $[(50-2*5), (50+2*5)]$, se halla el 95.44 % del área total entonces por simetría, la probabilidad que X se halle entre 40 y 50, será la mitad de la anterior es decir 0.4772.

Ejercicio 2)

Parte a)

$$\text{La } P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 1 - (0.15) * \sum_1^6 (0.85)^i = 0.470$$

$$\text{El } E(X) \text{ será entonces } \frac{1}{0.15} = 6.67 \text{ aprox.}$$

Parte b)

La probabilidad de tener 2 hijos de un sexo y 2 de otro, (único caso), es $C_2^4 (1/2)^4 = 0.375$

La probabilidad de tener 3 hijos de un sexo y 1 de otro se da en 2 casos, 3V y 1M, o 3M y 1V, por lo tanto será $2 * C_3^4 (1/2)^4 = 0.5$, con lo cual es más probable esta combinación de hijos.

Parte c)

Como para cada 20 km, se tiene un valor de $\lambda = 2$, entonces para 15 km, por regla de 3 simple se tiene que el valor medio es $\lambda = 3/2$, entonces si X registra el número de baches en esa extensión, se trata de $P(X=0) = e^{-3/2} = 0.223$.

Por otra parte, la probabilidad de tener que reparar por lo menos 1 bache es el complemento de no tener que reparar ninguno, es decir que si Y registra el número de baches en la nueva extensión, 25 km, con valor medio $\lambda = 5/2$, se tiene:

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y=0) = 1 - e^{-5/2} = 1 - 0.082 = 0.918$$

Parte d)

El experimento consiste en extraer 4 bolas anotar la cantidad de rojas, reponer las bolas en la urna y volver a repetir indefinidamente este procedimiento. Por lo tanto si X es una VAD, que registra el número de bolas rojas extraídas en una extracción arbitraria, los valores posibles para esta variable serán: 1, 2, 3, 4.

Por lo tanto para hallar la función de probabilidad asociada, deberemos calcular que probabilidad existe para cada uno de los valores posibles de X:

$$P(X=0) = 0$$

$$P(X=1) = \frac{C_1^7 * C_3^3}{C_4^{10}} = 0.03333$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^7 * C_2^3}{C_4^{10}} = 0.3$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^7 * C_1^3}{C_4^{10}} = 0.5$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^7 * C_0^3}{C_4^{10}} = .166667$$

Y su función de Distribución será:

$$F(X) = \begin{cases} 0 \Leftrightarrow X = 0 \\ 0.0333 \Leftrightarrow X = 1 \\ 0.3333 \Leftrightarrow X = 2 \\ 0.83333 \Leftrightarrow X = 3 \\ 1 \Leftrightarrow X = 4 \end{cases}$$

De cual se deduce que: $P(1 \leq X \leq 3) = 0.8333$; $P(1 < X \leq 3) = 0.8$; $P(1 \leq X < 3) = 0.333333$

Prof. Espínola