

Probabilidad Condicional e Independencia

Ejercicio 1

Se consideran los sucesos A y B tales que $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{4}$ y $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Calcular $\mathbf{P}(B)$ en los siguientes casos:

1. Si A y B son independientes
2. Si A y B son disjuntos (o excluyentes)
3. Si A es un subconjunto de B

Ejercicio 2

Si A y B son sucesos independientes y B y C también son sucesos independientes. ¿Puede afirmarse que A y C son independientes? En caso afirmativo demostrarlo, en caso contrario dar un contraejemplo.

Ejercicio 3

Demostrar que A es independiente de A si y sólo si $\mathbf{P}(A) = 0$ ó $\mathbf{P}(A) = 1$.

Ejercicio 4

Se consideran los eventos A y B tales que

1. $\mathbf{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{1}{3}$ y $\mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Calcular
 - a) $\mathbf{P}(A|B)$
 - b) $\mathbf{P}(B|A)$
 - c) $\mathbf{P}(A^C|B)$
 - d) $\mathbf{P}(B^C|A)$
 - e) $\mathbf{P}(A^C|B^C)$
 - f) $\mathbf{P}(B^C|A^C)$
2. $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{8}$, $\mathbf{P}(B) = \frac{5}{8}$ y $\mathbf{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$. Calcular
 - a) $\mathbf{P}(A|B)$
 - b) $\mathbf{P}(B|A)$
3. $B \subseteq A$. Calcular $\mathbf{P}(A|B)$
4. A y B son disjuntos (o excluyentes), esto es $A \cap B = \emptyset$. Suponiendo $P(B) \neq 0$, calcular $\mathbf{P}(A|B)$.
¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa si $P(B) = 0$

Ejercicio 5

1. Una caja contiene 12 lámparas de las cuales 4 son defectuosas. Se toman al azar tres lámparas del lote una tras otra. Hallar la probabilidad de que las tres lámparas no sean defectuosas.
2. Se consideran ahora tres cajas con lámparas:
La caja 1 contiene 10 lámparas de las cuales 4 son defectuosas
La caja 2 contiene 6 lámparas de las cuales 1 es defectuosa
La caja 3 contiene 8 lámparas de las cuales 3 son defectuosas

Escogemos al azar una caja y luego sacamos una lámpara al azar ¿Cuál es la probabilidad de que la lámpara sea defectuosa?

Ejercicio 6

1. Se considera una caja que contiene 6 bolillas rojas, 4 blancas y 5 azules. Se extraen tres bolillas en forma sucesiva (sin reposición). Calcular la probabilidad que la primera sea roja, la segunda blanca y la tercera azul
2. Se consideran dos cajas con bolas. La caja 1 contiene 3 bolas rojas y 2 azules, la caja 2 contiene 2 bolas rojas y 8 azules. Se lanza una moneda, si se obtiene cara se saca una bola de la caja 1, y si se obtiene cruz se saca una bola de la caja 2.
 - a) Hallar la probabilidad que la bola extraída sea roja.
 - b) Si se sabe que la bola extraída es roja, ¿cuál es la probabilidad que provenga de la caja 1?

Ejercicio 7

1. Tres jugadores tiran al blanco. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{6}$, la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 3 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$. Cada uno dispara una vez.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado solamente una vez?
 - b) Si sólo uno da en el blanco, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?
2. La probabilidad de que el jugador 1 dé en el blanco es $\frac{1}{4}$ y la probabilidad de que el jugador 2 dé en el blanco es $\frac{1}{3}$.
 - a) Si cada uno dispara dos veces, ¿cuál es la probabilidad de que el blanco sea alcanzado por lo menos una vez?
 - b) Supongamos ahora que cada uno dispara una vez. Dado que el blanco fue alcanzado solamente una vez, ¿cuál es la probabilidad que haya sido el jugador 1?

Ejercicio 8

Se ha observado que los hombres y las mujeres reaccionan de forma diferente en determinada circunstancia; el 70 % de las mujeres reacciona positivamente, mientras sólo el 40 % de los hombres reacciona positivamente ante la misma circunstancia. Se sometió a una prueba a un grupo de 20 personas, 15 mujeres y 5 hombres para descubrir sus reacciones. Una prueba escogida al azar de las 20 resultó negativa. ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido realizada por un hombre?

Ejercicio 9

Este ejercicio consiste en demostrar y aplicar una *generalización de la Fórmula de Bayes*.

1. Sea $B_1, B_2, \dots, B_n$ una partición de Ω (es decir $B_1, B_2, \dots, B_n$ incompatibles y $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$) y sea A otro suceso cualquiera, probar que

$$\mathbf{P}(B_j|A) = \frac{\mathbf{P}(A|B_j) \mathbf{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A|B_i) \mathbf{P}(B_i)}$$

para todo $j = 1, \dots, n$.

2. En un país hay cuatro partidos políticos. Se sabe que:

El 35 % de la población pertenece al partido I

El 31 % pertenece al partido II

El 28 % pertenece al partido III

El 6 % pertenece al partido IV

Entre los adherentes al partido I, un 36 % corresponde a personas con ingresos inferiores a dos salarios mínimos

Entre los adherentes al partido II, esa proporción es del 52 %

Para el partido III, es un 42 %

Para el partido IV, 11 %

Si se elige una persona al azar y resulta tener ingresos inferiores a dos salarios mínimos. Calcular la probabilidad de que sea un adherente al partido I; al partido II; al partido III y al partido IV.

3. Tres máquinas A, B y C producen respectivamente 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de producción de defectuosos de cada máquina son 3 %, 4 % y 5 % respectivamente. Se toma al azar un artículo de la producción total. Si el artículo seleccionado es defectuoso, hallar la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A.

Ejercicio 10 Primer parcial, mayo de 1999

Supongamos que en un país el 40 % de los ciudadanos habilitados para votar pertenece al partido A, el 35 % al partido B y el 25 % al partido C.

Se realiza de manera simultánea una elección interna en los tres partidos, pero como no se requiere acreditar la adhesión a cada partido, el voto “extrapartidario” es posible: un votante de un partido puede, si quiere, participar en la interna de otro partido.

Supongamos que Ud. sabe que:

Entre los adherentes de A, un 10 % votó en la elección interna de otro partido

Entre los adherentes de B, un 15 % votó en la interna de A

Entre los adherentes de C, un 5 % votó en la interna de A

1. ¿Cuál fue el porcentaje de votos obtenidos por el partido A en las internas?
2. Si se elige al azar una persona dentro de todas las que en las votaron a A,
 - a) ¿Cuál es la probabilidad que sea un adherente de B?
 - b) ¿Cuál es la probabilidad que sea un adherente de C?
3. Si 400.000 personas votaron en la interna de A,
 - a) ¿En cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes de B?
 - b) ¿En cuánto estimaría la cantidad de votantes de A que son adherentes de C?

Ejercicio 11 Examen, marzo de 2003

Se admite que entre los jugadores profesionales de ping pong un 5 % consume anfetaminas antes de cada partido. Durante un campeonato se les toma una muestra de orina a todos los jugadores. La muestra de cada jugador se divide en dos submuestras iguales a las que se les aplica un análisis clínico: si el resultado de aplicar el análisis a las dos submuestras da positivo, el jugador es sancionado; en cualquier otro caso el jugador no es sancionado.

Considere los eventos:

$A_1 = \{ \text{el resultado de la primera submuestra es positivo} \}$

$A_2 = \{ \text{el resultado de la segunda submuestra es positivo} \}$

$B = \{ \text{el jugador es sancionado} \}$

$D = \{ \text{el jugador consumió anfetaminas} \}$

Se asume que los eventos A_1 y A_2 condicionados a los eventos D y a D^c son independientes, esto es: $P(A_1 \cap A_2 | D) = P(A_1 | D)P(A_2 | D)$ y $P(A_1 \cap A_2 | D^c) = P(A_1 | D^c)P(A_2 | D^c)$.

Se sabe además que $P(A_i | D) = 0,90$ y $P(A_i | D^c) = 0,02$ para $i = 1, 2$.

1. Calcule $P(D | A_1)$, esto es, la probabilidad de que un jugador haya consumido anfetaminas dado que el resultado de la primera submuestra es positivo.
2. Calcule $P(B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sea sancionado. ¿Son A_1 y A_2 eventos independientes?

3. Calcule $P(D|B)$, esto es, la probabilidad de que un jugador sancionado haya consumido anfetaminas.

Ejercicio 12 Examen, febrero 2004

De una caja que contiene 3 bolas rojas y 2 azules se extrae una bola al azar y se la coloca en una segunda caja que contiene 4 bolas azules y 2 rojas. **A continuación** se extrae una bola al azar de la segunda caja.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que se extraiga la misma bola que se extrajo de la primera caja?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la bola extraída de la segunda caja sea roja?
3. Si la bola extraída de la segunda caja es roja, ¿cuál es la probabilidad de que sea la misma bola que se extrajo de la primera caja?