FICHA Nº 12. EL CONJUNTO PROP

El conjunto PROP. Definición inductiva.

Sea Σ_{PROP} un alfabeto que contiene:

- Símbolos de proposición: $p_1,\ p_2,\dots,\ p_n$ con $n\in N^*$.
- Símbolos lógicos: la constante $\perp$, y las conectivas lógicas: $\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$
- Símbolos auxiliares: $($, $)$

Sobre este alfabeto, se define inductivamente, un lenguaje específico de Σ^*_{PROP}, lenguaje de las proposiciones lógicas, comúnmente llamado $PROP$, como sigue:

a) $p_i \in PROP,\ \forall i\in N^*$
b) $\perp\in PROP$
c) Si $\alpha\in PROP$ y $\beta\in PROP$, entonces:
   i) $(\alpha\wedge\beta)\in PROP,$
   ii) $(\alpha\vee\beta)\in PROP,$
   iii) $(\alpha\rightarrow\beta)\in PROP,$
   iv) $(\alpha\leftrightarrow\beta)\in PROP$ y
   v) $(\neg\alpha)\in PROP.$

Observaciones:

1) El símbolo $\perp$ recibe el nombre de falso o absurdo. Si bien se podría prescindir de él, tiene ciertas ventajas a la hora de construir los elementos de $PROP$.
2) Los símbolos de proposición p_i, con $i\in N^*$, junto con el símbolo $\perp$ reciben el nombre de proposiciones primitivas o atómicas. Usualmente, en lugar de $p_1,\ p_2,\ p_3,\dots$ se utilizan las letras $p,\ q,\ r,\dots$

Actividad 1.

Demuestra que:

a) $\big((p\vee q)\rightarrow(\neg r)\big)\in PROP$
b) $\big(\big((p\wedge q)\vee(p\rightarrow\perp)\big)\leftrightarrow\big(p\wedge(\neg q)\big)\big)\in PROP$
c) $\big((\neg p)\rightarrow\vee)\big)\notin PROP$

Actividad 2. Secuencia de formación de una proposición.

Una sucesión $\alpha_1,\alpha_2,\ \alpha_3,\dots,\alpha_n$ de elementos de $PROP$ es una secuencia de formación de $\alpha,\ \alpha\in PROP,$ si y sólo si, $\alpha_n=\alpha$ y para todo natural $i\le n$, se cumple:

i) $\alpha_i\in\{\perp,\ p_1,\ p_2,\dots\}$ o
ii) $\alpha_i=(\alpha_j\oplus\alpha_k)$ con $\oplus\in\{\wedge,\vee,\rightarrow,\leftrightarrow\}$ para ciertos j y k naturales, no nulos, menores que i, o
iii) $\alpha_i=(\neg\alpha_j)$ con $j\in N^*$ siendo $j<i.$

Cita dos secuencias diferentes de formación para cada uno de los siguientes elementos de $PROP$:

a) $((p\vee q)\rightarrow(\neg r))$
b) $((p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow(\neg q)))$
c) $((\neg p)\leftrightarrow(p\wedge\perp))$

Actividad 3. Conjunto de subfórmulas de una proposición.

Sea $Sub(\varphi)$ el conjunto definido como sigue:

i) $Sub(\varphi) = \{\varphi\}$ si φ es una proposición primitiva.

ii) $Sub((\varphi_1 \oplus \varphi_2)) = Sub(\varphi_1) \cup Sub(\varphi_2) \cup \{(\varphi_1 \oplus \varphi_2)\}$ con $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

iii) $Sub((\neg\varphi)) = Sub(\varphi) \cup \{(\neg\varphi)\}$

Cuando una proposición α pertenece al conjunto $Sub(\varphi)$, se dice que α es una subfórmula de φ.

a) Cita tres subfórmulas de diferente largo de: $((p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow (\neg q)))$
b) ¿Es $(\neg p)$ una subfórmula de $((p \vee q) \rightarrow (\neg r))$?

Actividad 4.

a) Enuncia el principio de inducción primitiva para $PROP$.
b) Demuestra, utilizando el principio de inducción primitiva, que cada elemento de $PROP$ tiene una cantidad par de paréntesis.

Actividad 5.

Define en forma recursiva una función $con : PROP \rightarrow N$ que contabiliza la cantidad de símbolos lógicos que tiene una proposición de $PROP$.
Por ejemplo: $con(\ ((p \rightarrow (\neg q)) \vee (\ (\neg p) \leftrightarrow \perp))\ ) = 6$

Actividad 6.

Define en forma recursiva una función $atom : PROP \rightarrow N$ que calcula la cantidad de proposiciones primitivas o atómicas que aparece en una proposición de $PROP$.
Por ejemplo: $atom(\ ((p \rightarrow (\neg q)) \vee (\ (\neg r) \leftrightarrow \perp))\ ) = 4$

Actividad 7. Valuaciones.

Una función $v : PROP \rightarrow \{0;1\}$ es una **valuación** si satisface las siguientes condiciones:

a) $v(\perp) = 0$
b) $v(\ (\alpha \wedge \beta)\ ) = mín\{v(\alpha),\ v(\beta)\}$
c) $v(\ (\alpha \vee \beta)\ ) = máx\{v(\alpha),\ v(\beta)\}$
d) $v(\ (\alpha \rightarrow \beta)\ ) = máx\{1 - v(\alpha),\ v(\beta)\}$
e) $v(\ (\alpha \leftrightarrow \beta)\ ) = 1$ si y sólo si $v(\alpha) = v(\beta)$
f) $v(\ (\neg\alpha)\ ) = 1 - v(\alpha)$

Sea $v : PROP \rightarrow \{0;1\}$ una valuación. Calcula, aplicando la definición de valuación:

a) $v(\ \ ((\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \vee (\neg\beta)\ \ )\ )$ sabiendo que $v(\alpha) = v(\beta) = 1$.
b) $v(\ (\ (\beta \rightarrow \alpha)\ \vee (\alpha \wedge (\neg\beta))\ )\ )$ siendo $v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 0$.
c) $v(\ (\ ((\alpha \rightarrow \beta) \wedge \alpha) \vee (\neg\alpha)\ )\ )$ sabiendo que $v(\alpha) = 1$.

Fuentes consultadas:
* http://www.fing.edu.uy/inco/cursos/logica/teorico/2011/02_11_Induccion.pdf
* Grimaldi, Ralph P. Matemáticas Discretas y Combinatoria. Tercera edición, 1994. Editorial: Addison-Wesley Iberoamericana.