

Un Algoritmo de Newton de Punto Interior y Aplicaciones en la Fundición Electromagnética de Metales

Alfredo Canelas

Instituto de Estructuras y Transporte
Facultad de Ingeniería

Primer Encuentro Uruguayo sobre Mecánica de Fluidos

Octubre de 2009

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Objetivo y Motivación

Objetivo

- 1) Definir e implementar un método numérico para problemas de optimización de Ingeniería Mecánica con las siguientes características:
 - ▶ El **Método de Elementos de Contorno** (MEC) es utilizado para calcular la solución de la ecuación de estado del problema.
 - ▶ La formulación **SAND** es utilizada para definir el problema de optimización.
 - ▶ Un **algoritmo de punto interior** es utilizado para la solución del problema de optimización discreto.
- 2) Estudiar numéricamente el problema inverso de *Fundición Electromagnética* (EMC).



Objetivo

- 1) Definir e implementar un método numérico para problemas de optimización de Ingeniería Mecánica con las siguientes características:
 - ▶ El **Método de Elementos de Contorno** (MEC) es utilizado para calcular la solución de la ecuación de estado del problema.
 - ▶ La formulación **SAND** es utilizada para definir el problema de optimización.
 - ▶ Un **algoritmo de punto interior** es utilizado para la solución del problema de optimización discreto.
- 2) Estudiar numéricamente el problema inverso de *Fundición Electromagnética* (EMC).

Motivación

Esta herramienta computacional está motivada en lo siguiente:

- 1) Análisis numérica de problemas no lineales:
 - ▶ Problemas de superficie libre:
Problema directo de Fundición Electromagnética.
Problema de infiltración en medio poroso.
 - ▶ Problemas con condiciones de contorno no lineales:
Problema de contacto.
- 2) Optimización de forma
 - ▶ Las funciones y sus derivadas pueden ser expresadas como una integral en el contorno.
- 3) Otros problemas de optimización de análisis no lineal:
 - ▶ Problema inverso de Fundición Electromagnética.

Motivación

Esta herramienta computacional está motivada en lo siguiente:

- 1) Análisis numérica de problemas no lineales:
 - ▶ Problemas de superficie libre:
Problema directo de Fundición Electromagnética.
Problema de infiltración en medio poroso.
 - ▶ Problemas con condiciones de contorno no lineales:
Problema de contacto.
- 2) Optimización de forma
 - ▶ Las funciones y sus derivadas pueden ser expresadas como una integral en el contorno.
- 3) Otros problemas de optimización de análisis no lineal:
 - ▶ Problema inverso de Fundición Electromagnética.

Motivación

Esta herramienta computacional está motivada en lo siguiente:

- 1) Análisis numérica de problemas no lineales:
 - ▶ Problemas de superficie libre:
Problema directo de Fundición Electromagnética.
Problema de infiltración en medio poroso.
 - ▶ Problemas con condiciones de contorno no lineales:
Problema de contacto.
- 2) Optimización de forma
 - ▶ Las funciones y sus derivadas pueden ser expresadas como una integral en el contorno.
- 3) Otros problemas de optimización de análisis no lineal:
 - ▶ Problema inverso de Fundición Electromagnética.

Objetivo y Motivación

Método de Elementos de Contorno

Por qué usar el Método de Elementos de Contorno?

El MEC utiliza la representación integral:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma . \quad (1)$$

- ▶ No precisa de la discretización del interior del dominio.
- ▶ Define un número menor de variables.

Muy indicado para:

- ▶ Problemas de dominio infinito.
- ▶ Optimización de forma.



Método de Elementos de Contorno

Por qué usar el Método de Elementos de Contorno?

El MEC utiliza la representación integral:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (1)$$

- ▶ No precisa de la discretización del interior del dominio.
- ▶ Define un número menor de variables.

Muy indicado para:

- ▶ Problemas de dominio infinito.
- ▶ Optimización de forma.

Objetivo y Motivación

Método de Elementos de Contorno

Por qué usar el Método de Elementos de Contorno?

El MEC utiliza la representación integral:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma . \quad (1)$$

- ▶ No precisa de la discretización del interior del dominio.
- ▶ Define un número menor de variables.

Muy indicado para:

- ▶ Problemas de dominio infinito.
- ▶ Optimización de forma.



Método de Elementos de Contorno

Por qué usar el Método de Elementos de Contorno?

El MEC utiliza la representación integral:

$$\mathbf{c}(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{p}(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) d\Gamma . \quad (1)$$

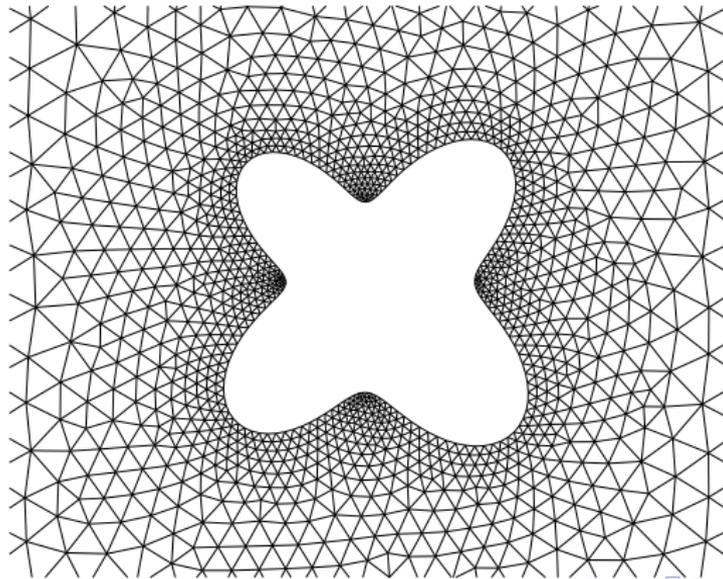
- ▶ No precisa de la discretización del interior del dominio.
- ▶ Define un número menor de variables.

Muy indicado para:

- ▶ Problemas de dominio infinito.
- ▶ Optimización de forma.

Malla

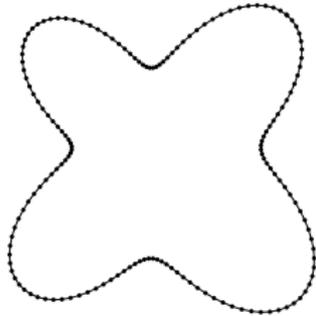
Malla de Elementos Finitos para simulación de un problema de Fundición Electromagnética.



Objetivo y Motivación

Malla

Malla equivalente utilizada por el Método de Elementos de Contorno.



Formulación SAND

Por qué usar la formulación SAND?

En la formulación clásica del problema de optimización en Ingeniería Mecánica el objetivo es encontrar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\text{minimice} && f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) \\ &\text{sujeto a:} && \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con $\tilde{\mathbf{u}}$ definida por la ecuación de estado:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) = 0 \quad (3)$$

Formulación SAND

Por qué usar la formulación SAND?

En la formulación clásica del problema de optimización en Ingeniería Mecánica el objetivo es encontrar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} &\text{minimice} && f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) \\ &\text{sujeto a:} && \mathbf{g}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Con $\tilde{\mathbf{u}}$ definida por la ecuación de estado:

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})) = 0 \quad (3)$$

Formulación SAND

En la formulación SAND:

- ▶ Las variables de estados son adicionadas como variables de optimización.
- ▶ La ecuación de estado es adicionada como restricción de igualdad.

$$\begin{aligned}
 &\text{minimice} && f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
 &\text{sujeto a:} && \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0 \\
 &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Ventajas de la formulación SAND

- 1) No precisa de la iteración para la solución de la ecuación de estado.
- 2) El análisis de sensibilidad es más simple (dependencia explícita de \mathbf{x} y \mathbf{u}).
- 3) En algunos casos permite utilizar algoritmos de optimización muy eficientes (Problemas lineales o cuadráticos).
- 4) Propiedad de separabilidad parcial de las funciones. Cálculo eficiente de las derivadas → Permite utilizar algoritmos de optimización basados en el método de Newton.

Ventajas de la formulación SAND

- 1) No precisa de la iteración para la solución de la ecuación de estado.
- 2) El análisis de sensibilidad es más simple (dependencia explícita de \mathbf{x} y \mathbf{u}).
- 3) En algunos casos permite utilizar algoritmos de optimización muy eficientes (Problemas lineales o cuadráticos).
- 4) Propiedad de separabilidad parcial de las funciones. Cálculo eficiente de las derivadas → Permite utilizar algoritmos de optimización basados en el método de Newton.

Ventajas de la formulación SAND

- 1) No precisa de la iteración para la solución de la ecuación de estado.
- 2) El análisis de sensibilidad es más simple (dependencia explícita de \mathbf{x} y \mathbf{u}).
- 3) En algunos casos permite utilizar algoritmos de optimización muy eficientes (Problemas lineales o cuadráticos).
- 4) Propiedad de separabilidad parcial de las funciones. Cálculo eficiente de las derivadas → Permite utilizar algoritmos de optimización basados en el método de Newton.

Ventajas de la formulación SAND

- 1) No precisa de la iteración para la solución de la ecuación de estado.
- 2) El análisis de sensibilidad es más simple (dependencia explícita de \mathbf{x} y \mathbf{u}).
- 3) En algunos casos permite utilizar algoritmos de optimización muy eficientes (Problemas lineales o cuadráticos).
- 4) Propiedad de **separabilidad parcial** de las funciones. Cálculo eficiente de las derivadas → Permite utilizar algoritmos de optimización basados en el método de Newton.

Ventajas de la formulación SAND

Muito indicada para:

- 1) Problemas no lineales.
- 2) Problemas donde sea necesario hallar derivadas segundas.
- 3) Problemas donde sea difícil hallar una configuración inicial conveniente: **permite una mayor libertad en la elección de la configuración inicial.**

Ventajas de la formulación SAND

Muito indicada para:

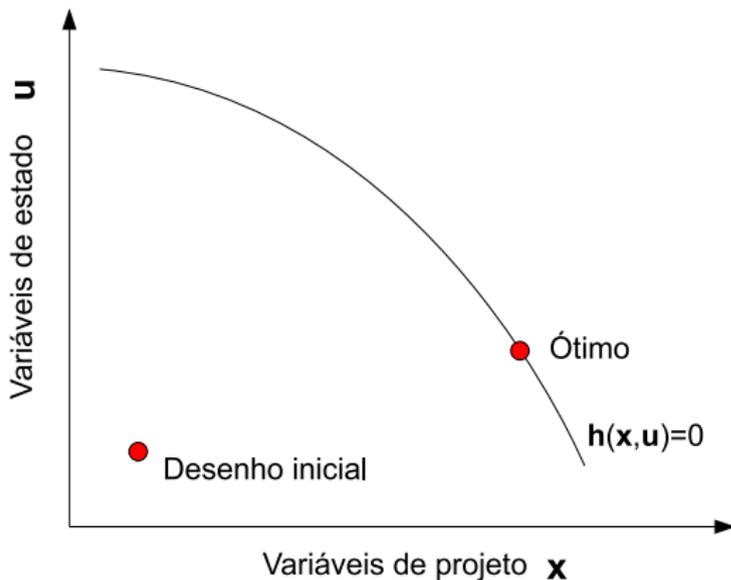
- 1) Problemas no lineales.
- 2) Problemas donde sea necesario hallar derivadas segundas.
- 3) Problemas donde sea difícil hallar una configuración inicial conveniente: **permite una mayor libertad en la elección de la configuración inicial.**

Ventajas de la formulación SAND

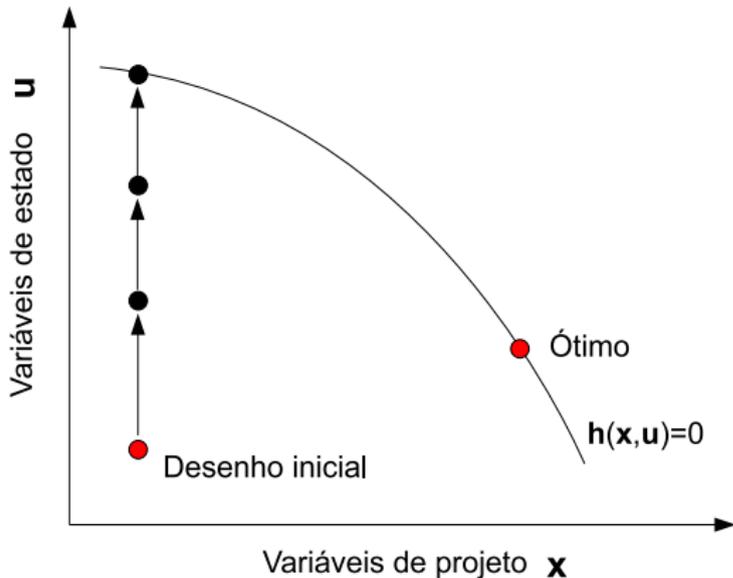
Muito indicada para:

- 1) Problemas no lineales.
- 2) Problemas donde sea necesario hallar derivadas segundas.
- 3) Problemas donde sea difícil hallar una configuración inicial conveniente: **permite una mayor libertad en la elección de la configuración inicial.**

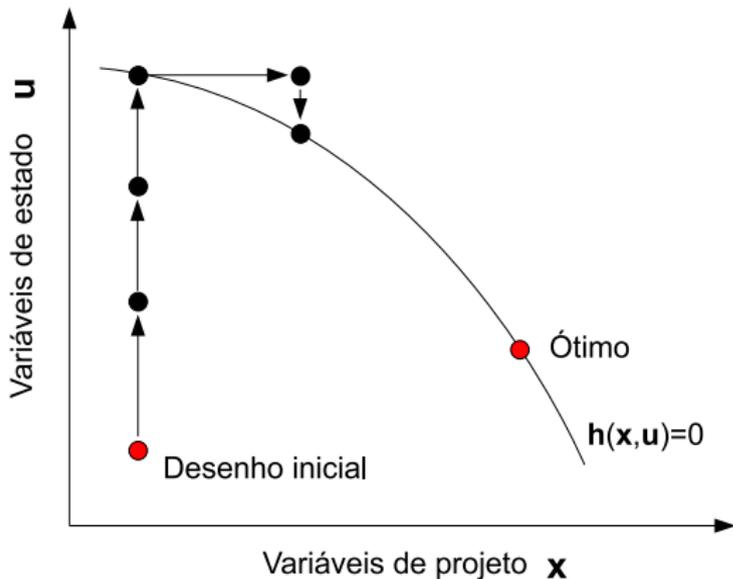
Formulación SAND



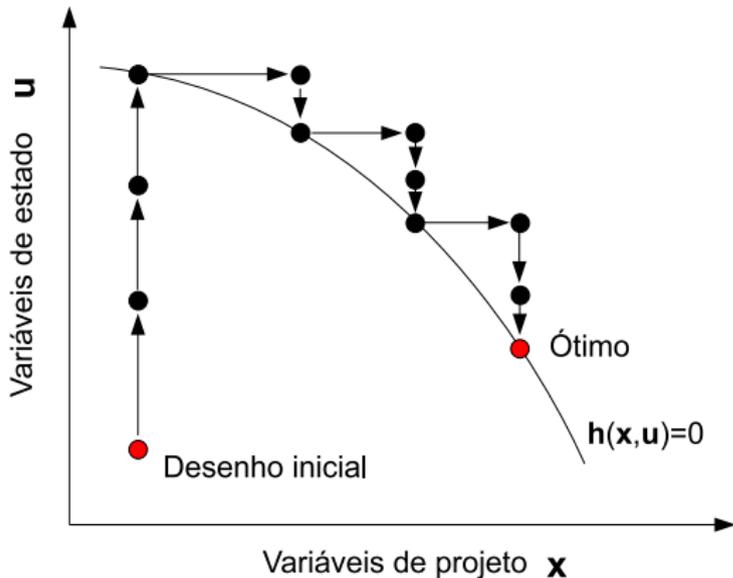
Formulación SAND



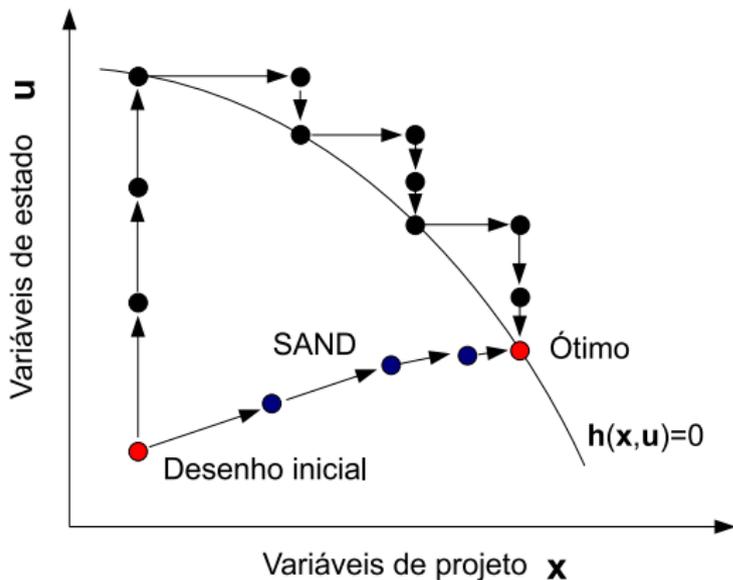
Formulación SAND



Formulación SAND



Formulación SAND



Algoritmo de punto interior

Por qué usar un algoritmo de optimización de punto interior?

Ventajas:

- 1) Conveniente para problemas de grande porte.
 - 2) Problemas esparzos o con otro tipo de estructura.
 - 3) Conveniente para ejecutar en computadores de arquitectura paralela.
- Muy indicado para utilizar junto a la formulación SAND.

Algoritmo de punto interior

Por qué usar un algoritmo de optimización de punto interior?

Ventajas:

- 1) Conveniente para problemas de grande porte.
 - 2) Problemas esparzos o con otro tipo de estructura.
 - 3) Conveniente para ejecutar en computadores de arquitectura paralela.
- Muy indicado para utilizar junto a la formulación SAND.

Algoritmo de punto interior

Por qué usar un algoritmo de optimización de punto interior?

Ventajas:

- 1) Conveniente para problemas de grande porte.
 - 2) Problemas esparzos o con otro tipo de estructura.
 - 3) Conveniente para ejecutar en computadores de arquitectura paralela.
- Muy indicado para utilizar junto a la formulación SAND.

Algoritmo de punto interior

Por qué usar un algoritmo de optimización de punto interior?

Ventajas:

- 1) Conveniente para problemas de grande porte.
- 2) Problemas esparzos o con otro tipo de estructura.
- 3) Conveniente para ejecutar en computadores de arquitectura paralela.

► Muy indicado para utilizar junto a la formulación SAND.

Algoritmo de punto interior

Por qué usar un algoritmo de optimización de punto interior?

Ventajas:

- 1) Conveniente para problemas de grande porte.
 - 2) Problemas esparzos o con otro tipo de estructura.
 - 3) Conveniente para ejecutar en computadores de arquitectura paralela.
- **Muy indicado para utilizar junto a la formulación SAND.**

Ventajas del método propuesto

- 1) MEC: Reducción del número de variables.
- 2) MEC: Problemas de dominio infinito.
- 3) SAND: Problemas no lineales.
- 4) SAND: Análisis de sensibilidad simple.
- 5) Punto interior: Conveniente para problemas de grande porte.

Ventajas del método propuesto

- 1) MEC: Reducción del número de variables.
- 2) MEC: Problemas de dominio infinito.
- 3) SAND: Problemas no lineales.
- 4) SAND: Análisis de sensibilidad simple.
- 5) Punto interior: Conveniente para problemas de grande porte.

Ventajas del método propuesto

- 1) MEC: Reducción del número de variables.
- 2) MEC: Problemas de dominio infinito.
- 3) SAND: Problemas no lineales.
- 4) SAND: Análisis de sensibilidad simple.
- 5) Punto interior: Conveniente para problemas de grande porte.

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Lineal

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Problema de Optimización No Linear

- ▶ Encontrar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{aligned} &\text{minimice} && f(\mathbf{x}) \\ &\text{sujeto a:} && \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0 \\ &&& \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

- ▶ **Región viable:**

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0\}$$

- ▶ \mathbf{x}^* es **mínimo local** si existe $\mathcal{N}(\mathbf{x}^*)$ tal que:

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}^*), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cap \mathcal{N}(\mathbf{x}^*) \quad (5)$$

Karush-Kuhn-Tucker

- **Regularidad de las restricciones:** para todo $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\{\nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \mid i \in \{1, \dots, p\}\} \text{ es l.i.}$$

- **TEOREMA** de **Karush-Kuhn-Tucker**:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) \lambda_i = 0 \quad (7)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (8)$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad (9)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (10)$$

Karush-Kuhn-Tucker

- ▶ **Regularidad de las restricciones:** para todo $\mathbf{x} \in \Omega$:

$$\{\nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mid \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = 0, \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \mid i \in \{1, \dots, p\}\} \text{ es l.i.}$$

- ▶ **TEOREMA** de **Karush-Kuhn-Tucker**:

Sistema
de
Ecuaciones
(Newton)

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{6}$$

$$\mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) \lambda_i = 0 \tag{7}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}^*) = 0 \tag{8}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq 0 \tag{9}$$

$$\lambda \geq 0 \tag{10}$$

Iteración de Newton

► **Función lagrangeana:**

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{h}_i(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_{\mathbf{xx}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla^2 \mathbf{h}_i(\mathbf{x})$$

► **Iteración de Newton:**

$$(\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \boldsymbol{\mu}_{k+1}) = (\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\mu}_k) + (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_\lambda, \mathbf{d}_\mu) \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ \boldsymbol{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & \mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ \nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_\lambda \\ \mathbf{d}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}} L_k^T \\ -\mathbf{G}_k \boldsymbol{\lambda}_k \\ -\mathbf{h}_k \end{pmatrix} \quad (12)$$

► **NO FUNCIONA**

Iteración de Newton

- **Función lagrangeana:**

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \mu_i \mathbf{h}_i(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla^2 \mathbf{h}_i(\mathbf{x})$$

- **Iteración de Newton:**

$$(\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{k+1}, \boldsymbol{\mu}_{k+1}) = (\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_k, \boldsymbol{\mu}_k) + (\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_\lambda, \mathbf{d}_\mu) \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ \boldsymbol{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & \mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ \nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x \\ \mathbf{d}_\lambda \\ \mathbf{d}_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla_x L_k^T \\ -\mathbf{G}_k \boldsymbol{\lambda}_k \\ -\mathbf{h}_k \end{pmatrix} \quad (12)$$

- **NO FUNCIONA**

Iteración de Newton

Idea:

- ▶ Definir un algoritmo de optimización basado en la **dirección de la iteración de Newton**.

Motivación: problemas con costo de cálculo de \mathbf{H} pequeño.

- ▶ Problemas de programación lineal o cuadrática.
- ▶ Problemas de la colección **CUTE**.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
- ▶ En la Ingeniería Mecánica:
 - ▶ Utilizando la formulación SAND.
 - ▶ Utilizando modelos aproximados.

Iteración de Newton

Idea:

- ▶ Definir un algoritmo de optimización basado en la **dirección de la iteración de Newton**.

Motivación: problemas con costo de cálculo de **H** pequeño.

- ▶ Problemas de programación lineal o cuadrática.
- ▶ Problemas de la colección **CUTE**.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
- ▶ En la Ingeniería Mecánica:
 - ▶ Utilizando la formulación SAND.
 - ▶ Utilizando modelos aproximados.

Iteración de Newton

Idea:

- ▶ Definir un algoritmo de optimización basado en la **dirección de la iteración de Newton**.

Motivación: problemas con costo de cálculo de **H** pequeño.

- ▶ Problemas de programación lineal o cuadrática.
- ▶ Problemas de la colección **CUTE**.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
- ▶ En la Ingeniería Mecánica:
 - ▶ Utilizando la formulación SAND.
 - ▶ Utilizando modelos aproximados.

Iteración de Newton

Idea:

- ▶ Definir un algoritmo de optimización basado en la **dirección de la iteración de Newton**.

Motivación: problemas con costo de cálculo de **H** pequeño.

- ▶ Problemas de programación lineal o cuadrática.
- ▶ Problemas de la colección **CUTE**.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
- ▶ En la Ingeniería Mecánica:
 - ▶ Utilizando la formulación SAND.
 - ▶ Utilizando modelos aproximados.

Iteración de Newton

Idea:

- ▶ Definir un algoritmo de optimización basado en la **dirección de la iteración de Newton**.

Motivación: problemas con costo de cálculo de **H** pequeño.

- ▶ Problemas de programación lineal o cuadrática.
- ▶ Problemas de la colección **CUTE**.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
- ▶ En la Ingeniería Mecánica:
 - ▶ Utilizando la formulación SAND.
 - ▶ Utilizando modelos aproximados.

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Algoritmo FDIPA

Herskovits (1998).

- ▶ FDIPA genera una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta$:

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \quad (14)$$

- ▶ La secuencia reduce en cada iteración el valor de la **función potencial** $\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$:

$$\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{c}_i |\mathbf{h}_i(\mathbf{x})| \quad (15)$$

- ▶ La dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & 0 \\ 0 & -\Lambda_k \omega^l \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix} \quad (16)$$

Algoritmo FDIPA

Herskovits (1998).

- ▶ FDIPA genera una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta$:

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \quad (14)$$

- ▶ La secuencia reduce en cada iteración el valor de la **función potencial** $\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$:

$$\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{c}_i |\mathbf{h}_i(\mathbf{x})| \quad (15)$$

- ▶ La dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\mathbf{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{\Lambda}_k \boldsymbol{\omega}^l \\ \mathbf{h}_k & -\boldsymbol{\omega}^E \end{pmatrix} \quad (16)$$

Algoritmo FDIPA

Herskovits (1998).

- ▶ FDIPA genera una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta$:

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0\} \tag{13}$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \tag{14}$$

- ▶ La secuencia reduce en cada iteración el valor de la **función potencial**

$\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$:

$$\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{c}_i |\mathbf{h}_i(\mathbf{x})| \tag{15}$$

- ▶ La dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & 0 \\ 0 & -\Lambda_k \omega^l \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix} \tag{16}$$

\mathbf{B}_k positiva definida en vez de la hessiana

Algoritmo FDIPA

Herskovits (1998).

- ▶ FDIPA genera una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Delta$:

$$\Delta = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0\} \quad (13)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \quad (14)$$

- ▶ La secuencia reduce en cada iteración el valor de la **función potencial** $\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x})$:

$$\phi_{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \mathbf{c}_i |\mathbf{h}_i(\mathbf{x})| \quad (15)$$

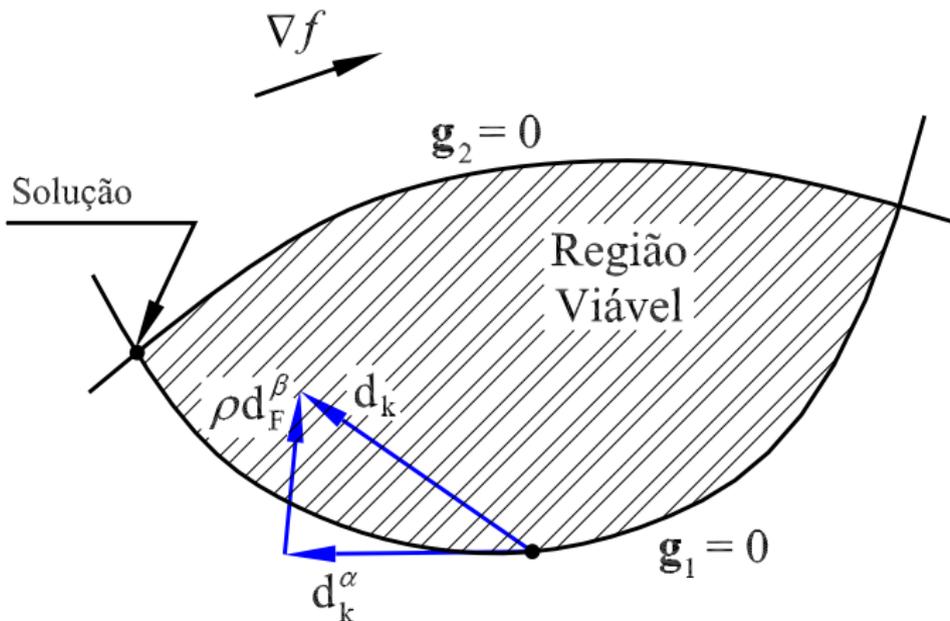
- ▶ La dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{B}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\mathbf{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha \\ \lambda^\alpha \\ \mu^\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\beta \\ \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & 0 \\ 0 & -\mathbf{\Lambda}_k \boldsymbol{\omega}^l \\ \mathbf{h}_k & -\boldsymbol{\omega}^E \end{pmatrix} \quad (16)$$

\mathbf{B}_k positiva definida en vez de la hessiana

\mathbf{d}_x^β : dirección de desvío

Dirección de desvío



Convergencia global de FDIPA

- ▶ Regularidad de las restricciones + \mathbf{B} positiva definida + $\lambda > 0$ + $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0$:

→ Sistema lineal no es singular

- ▶ \mathbf{x} no es punto estacionario: → $\|\mathbf{d}_x\| > 0$
- ▶ Viabilidad uniforme: Existe $\theta_1 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_1]$

$$\rightarrow \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \in \Delta$$

- ▶ Decréscimo uniforme: Existe $\theta_2 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_2]$

$$\phi_{\mathbf{c}_k}(\mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x) \leq \phi_{\mathbf{c}_k}(\mathbf{x}_k) + t_k \eta \nabla \phi_{\mathbf{c}_k} \mathbf{d}_x$$

- ▶ Búsqueda lineal: Hallar t (Armijo, Wolfe, etc.).

Convergencia global de FDIPA

- ▶ Regularidad de las restricciones + \mathbf{B} positiva definida + $\lambda > 0$ + $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0$:

→ Sistema lineal no es singular

- ▶ \mathbf{x} no es punto estacionario: → $\|\mathbf{d}_x\| > 0$
- ▶ Viabilidad uniforme: Existe $\theta_1 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_1]$

$$\rightarrow \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \in \Delta$$

- ▶ Decréscimo uniforme: Existe $\theta_2 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_2]$

$$\phi_{\mathbf{c}_k}(\mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x) \leq \phi_{\mathbf{c}_k}(\mathbf{x}_k) + t_k \eta \nabla \phi_{\mathbf{c}_k} \mathbf{d}_x$$

- ▶ Búsqueda lineal: Hallar t (Armijo, Wolfe, etc.).

Convergencia global de FDIPA

- ▶ Regularidad de las restricciones + \mathbf{B} positiva definida + $\lambda > 0$ + $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0$:

→ Sistema lineal no es singular

- ▶ \mathbf{x} no es punto estacionario: → $\|\mathbf{d}_x\| > 0$
- ▶ **Viabilidad uniforme:** Existe $\theta_1 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_1]$

$$\rightarrow \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \in \Delta$$

- ▶ **Decréscimo uniforme:** Existe $\theta_2 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_2]$

$$\phi_{c_k}(\mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x) \leq \phi_{c_k}(\mathbf{x}_k) + t_k \eta \nabla \phi_{c_k} \mathbf{d}_x$$

- ▶ **Búsqueda lineal:** Hallar t (Armijo, Wolfe, etc.).

Convergencia global de FDIPA

- ▶ Regularidad de las restricciones + \mathbf{B} positiva definida + $\lambda > 0$ + $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \geq 0$:

→ Sistema lineal no es singular

- ▶ \mathbf{x} no es punto estacionario: → $\|\mathbf{d}_x\| > 0$
- ▶ **Viabilidad uniforme**: Existe $\theta_1 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_1]$

$$\rightarrow \mathbf{x}_k + t \mathbf{d}_x \in \Delta$$

- ▶ **Decrécimo uniforme**: Existe $\theta_2 > 0$ tal que $\forall t \in [0, \theta_2]$

$$\phi_{\mathbf{c}_k}(\mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x) \leq \phi_{\mathbf{c}_k}(\mathbf{x}_k) + t_k \eta \nabla \phi_{\mathbf{c}_k} \mathbf{d}_x$$

- ▶ **Búsqueda lineal**: Hallar t (Armijo, Wolfe, etc.).

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Algoritmo FDIPA-H

- ▶ Mantener la hessiana \mathbf{H}_k en el sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\mathbf{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha \\ \lambda^\alpha \\ \mu^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_k \end{pmatrix}$$

- ▶ $A = \{i \mid \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = 0\}$, $I = \{j \mid \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) > 0\}$.

- ▶ Espacio tangente:

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \perp \{\nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mid i \in A, \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \mid i \in \{1, \dots, p\}\}\} \quad (17)$$

- ▶ Matriz \mathbf{M} :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) + \sum_{i \in I} \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^{-1} \lambda_i \nabla \mathbf{g}_i^T(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \quad (18)$$

- ▶ Función potencial:

$$\phi_c(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + c \Psi(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (19)$$

Algoritmo FDIPA-H

- ▶ Mantener la hessiana \mathbf{H}_k en el sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\mathbf{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha \\ \lambda^\alpha \\ \mu^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T \\ 0 \\ \mathbf{h}_k \end{pmatrix}$$

- ▶ $A = \{i \mid \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = 0\}$, $I = \{i \mid \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) > 0\}$.

- ▶ Espacio tangente:

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \perp \{\nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mid i \in A, \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \mid i \in \{1, \dots, p\}\}\} \quad (17)$$

- ▶ Matriz \mathbf{M} :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) + \sum_{i \in I} \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^{-1} \lambda_i \nabla \mathbf{g}_i^T(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \quad (18)$$

- ▶ Función potencial:

$$\phi_c(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + c \Psi(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (19)$$

Algoritmo FDIPA-H

- ▶ Mantener la hessiana \mathbf{H}_k en el sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\mathbf{\Lambda}_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & 0 \\ -\nabla \mathbf{h}_k & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha \\ \lambda^\alpha \\ \mu^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T \\ 0 \\ \mathbf{h}_k \end{pmatrix}$$

- ▶ $A = \{i \mid \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) = 0\}$, $I = \{i \mid \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) > 0\}$.

- ▶ Espacio tangente:

$$\mathcal{T} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{v} \perp \{\nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \mid i \in A, \nabla \mathbf{h}_i(\mathbf{x}) \mid i \in \{1, \dots, p\}\}\} \quad (17)$$

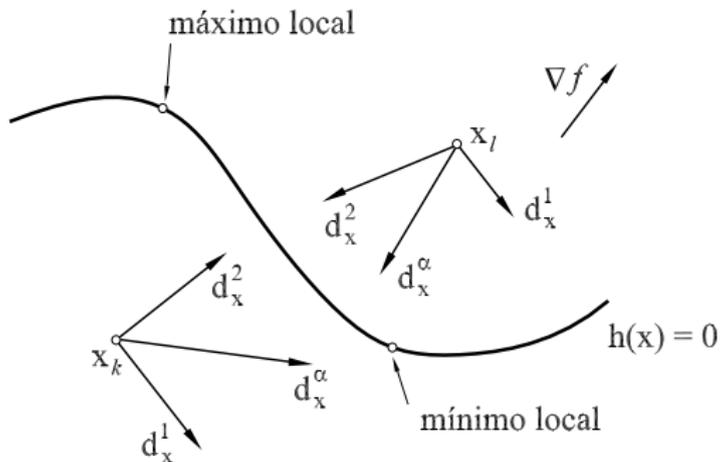
- ▶ Matriz \mathbf{M} :

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = \mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda, \mu) + \sum_{i \in I} \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^{-1} \lambda_i \nabla \mathbf{g}_i^T(\mathbf{x}) \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) \quad (18)$$

- ▶ Función potencial:

$$\phi_c(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + c \Psi(\mathbf{h}(\mathbf{x})) \quad (19)$$

Dirección de Newton



- **M** debe ser **positiva definida** en el espacio \mathcal{T}

\mathbf{M}_k no es positiva definida en \mathcal{T}

► Dos preguntas:

- 1) Cómo saber si \mathbf{M} es positiva definida en el espacio \mathcal{T} ?
- 2) Qué hacer si no es ?

► **TEOREMA 3.40:** \mathbf{M} es positiva definida en el espacio tangente $\mathcal{T} \Leftrightarrow$ la matriz \mathbf{A} del sistema lineal tiene **inercia** $\{n, m + p, 0\}$

- n es la dimensión de \mathbf{x}
- m es la dimensión de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$
- p es la dimensión de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$

► $\text{inercia}(\mathbf{A}) = \{i_+, i_-, i_0\}$

- i_+ es el número de valores propios positivos
- i_- es el número de valores propios negativos
- i_0 es el número de valores propios nulos

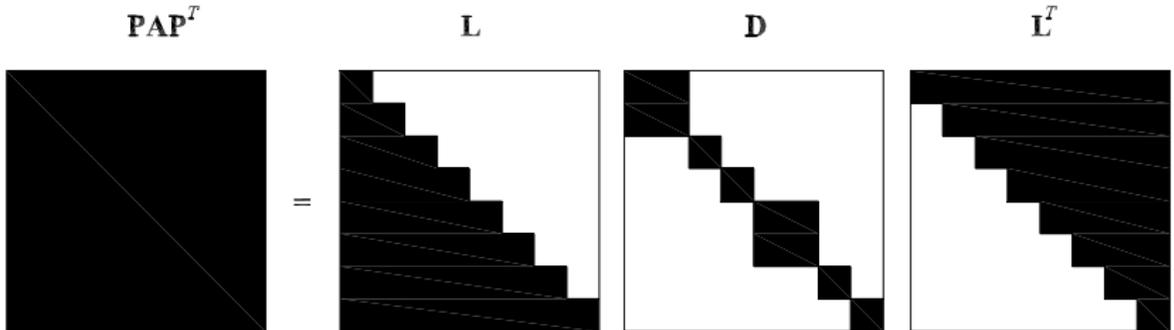
\mathbf{M}_k no es positiva definida en \mathcal{T}

- ▶ Dos preguntas:
 - 1) Cómo saber si \mathbf{M} es positiva definida en el espacio \mathcal{T} ?
 - 2) Qué hacer si no es ?
- ▶ **TEOREMA 3.40:** \mathbf{M} es positiva definida en el espacio tangente $\mathcal{T} \Leftrightarrow$ la matriz \mathbf{A} del sistema lineal tiene **inercia** $\{n, m + p, 0\}$
 - ▶ n es la dimensión de \mathbf{x}
 - ▶ m es la dimensión de $\mathbf{g}(\mathbf{x})$
 - ▶ p es la dimensión de $\mathbf{h}(\mathbf{x})$
- ▶ $\text{inercia}(\mathbf{A}) = \{i_+, i_-, i_0\}$
 - ▶ i_+ es el número de valores propios positivos
 - ▶ i_- es el número de valores propios negativos
 - ▶ i_0 es el número de valores propios nulos

Descomposición LDL^T

- ▶ Para saber la inercia o resolver el sistema lineal usamos la **descomposición LDL^T** :

$$PAP^T = LDL^T$$

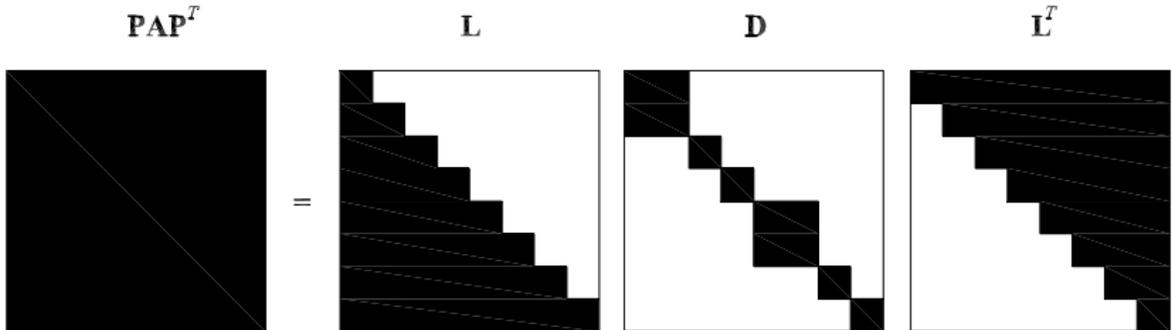


- ▶ **TEOREMA (Sylvester):** $\text{inercia}(\mathbf{A}) = \text{inercia}(\mathbf{D})$

Descomposición LDL^T

- ▶ Para saber la inercia o resolver el sistema lineal usamos la **descomposición LDL^T** :

$$PAP^T = LDL^T$$



- ▶ **TEOREMA (Sylvester):** $\text{inercia}(\mathbf{A}) = \text{inercia}(\mathbf{D})$

M no es positiva definida en \mathcal{T}

- (1) Substituir \mathbf{d}_x^1 por $-\mathbf{d}_x^1$, si \mathbf{d}_x^1 no fuera de decrecimiento para la función objetivo.
 - (2) En la próxima iteración substituir \mathbf{H}_k por $\mathbf{H}_k + \gamma \mathbf{I}$
 - ▶ Siempre existe γ conveniente
 - ▶ Preserva la esparcidad de \mathbf{H}_k
- ▶ Ejemplo: utilizar $\mathbf{H}_k + \gamma \mathbf{I}$ positiva definida:

$$\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max \left(1.2 \sum_{j \neq i} |(\mathbf{H}_k)_{ij}| - (\mathbf{H}_k)_{ii}, 0 \right) \right\}. \quad (20)$$

- ▶ **TEOREMA 3.50** Toda subsecuencia convergente de la secuencia generada por el algoritmo FDIPA-H converge para un punto de Karush-Kuhn-Tucker del problema de optimización.

M no es positiva definida en \mathcal{T}

- (1) Substituir \mathbf{d}_x^1 por $-\mathbf{d}_x^1$, si \mathbf{d}_x^1 no fuera de decrecimiento para la función objetivo.
 - (2) En la próxima iteración substituir \mathbf{H}_k por $\mathbf{H}_k + \gamma \mathbf{I}$
 - ▶ Siempre existe γ conveniente
 - ▶ Preserva la esparcidad de \mathbf{H}_k
- ▶ Ejemplo: utilizar $\mathbf{H}_k + \gamma \mathbf{I}$ positiva definida:

$$\gamma = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max \left(1.2 \sum_{j \neq i} |(\mathbf{H}_k)_{ij}| - (\mathbf{H}_k)_{ii}, 0 \right) \right\}. \quad (20)$$

- ▶ **TEOREMA 3.50** Toda subsecuencia convergente de la secuencia generada por el algoritmo FDIPA-H converge para un punto de Karush-Kuhn-Tucker del problema de optimización.

Algoritmo de Optimización FDIPA-H

Dados: $\mathbf{x}_0 \in \Delta^0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$
 $\omega^I \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\omega^E \in \mathbb{R}^p$ positivo y c_0 positivo.

Paso 1: Test de convergencia

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda

2.1 Escoja el parámetro γ_k solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k + \gamma_k \mathbf{I} & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_k \omega^I \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix}.$$

2.2 Si $\mathbf{d}_x^\alpha = \mathbf{0}$ pare

2.4 Actualice c_k

2.5 Calcule ρ y la dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$

Paso 3: Búsqueda lineal

Paso 4: Actualización: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x$

4.2 Retorne al Paso 1.

Algoritmo de Optimización FDIPA-H

Dados: $\mathbf{x}_0 \in \Delta^0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$
 $\omega^I \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\omega^E \in \mathbb{R}^p$ positivo y c_0 positivo.

Paso 1: Test de convergencia

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda

2.1 Escoja el parámetro γ_k solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k + \gamma_k \mathbf{I} & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_k \omega^I \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix}.$$

2.2 Si $\mathbf{d}_x^\alpha = \mathbf{0}$ pare

2.4 Actualice c_k

2.5 Calcule ρ y la dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$

Paso 3: Búsqueda lineal

Paso 4: Actualización: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x$

4.2 Retorne al Paso 1.

Algoritmo de Optimización FDIPA-H

Dados: $\mathbf{x}_0 \in \Delta^0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$
 $\omega^I \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\omega^E \in \mathbb{R}^p$ positivo y c_0 positivo.

Paso 1: Test de convergencia

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda

2.1 Escoja el parámetro γ_k solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k + \gamma_k \mathbf{I} & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_k \omega^I \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix}.$$

2.2 Si $\mathbf{d}_x^\alpha = \mathbf{0}$ pare

2.4 Actualice c_k

2.5 Calcule ρ y la dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$

Paso 3: Búsqueda lineal

Paso 4: Actualización: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x$

4.2 Retorne al Paso 1.

Algoritmo de Optimización FDIPA-H

Dados: $\mathbf{x}_0 \in \Delta^0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$
 $\omega^I \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\omega^E \in \mathbb{R}^p$ positivo y c_0 positivo.

Paso 1: Test de convergencia

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda

2.1 Escoja el parámetro γ_k solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k + \gamma_k \mathbf{I} & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_k \omega^I \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix}.$$

2.2 Si $\mathbf{d}_x^\alpha = \mathbf{0}$ pare

2.4 Actualice c_k

2.5 Calcule ρ y la dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$

Paso 3: Búsqueda lineal

Paso 4: Actualización: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x$

4.2 Retorne al Paso 1.

Algoritmo de Optimización FDIPA-H

Dados: $\mathbf{x}_0 \in \Delta^0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$
 $\omega^I \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\omega^E \in \mathbb{R}^p$ positivo y c_0 positivo.

Paso 1: Test de convergencia

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda

2.1 Escoja el parámetro γ_k solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k + \gamma_k \mathbf{I} & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_k \omega^I \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix}.$$

2.2 Si $\mathbf{d}_x^\alpha = \mathbf{0}$ pare

2.4 Actualice c_k

2.5 Calcule ρ y la dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$

Paso 3: Búsqueda lineal

Paso 4: Actualización: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x$

4.2 Retorne al Paso 1.

Algoritmo de Optimización FDIPA-H

Dados: $\mathbf{x}_0 \in \Delta^0$, $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$
 $\omega^I \in \mathbb{R}^m$ positivo, $\omega^E \in \mathbb{R}^p$ positivo y c_0 positivo.

Paso 1: Test de convergencia

Paso 2: Cálculo de la dirección de búsqueda

2.1 Escoja el parámetro γ_k solución del sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_k + \gamma_k \mathbf{I} & -\nabla \mathbf{g}_k^T & -\nabla \mathbf{h}_k^T \\ -\Lambda_k \nabla \mathbf{g}_k & -\mathbf{G}_k & \mathbf{0} \\ -\nabla \mathbf{h}_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_x^\alpha & \mathbf{d}_x^\beta \\ \lambda^\alpha & \lambda^\beta \\ \mu^\alpha & \mu^\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f_k^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\Lambda_k \omega^I \\ \mathbf{h}_k & -\omega^E \end{pmatrix}.$$

2.2 Si $\mathbf{d}_x^\alpha = \mathbf{0}$ pare

2.4 Actualice c_k

2.5 Calcule ρ y la dirección $\mathbf{d}_x = \mathbf{d}_x^\alpha + \rho \mathbf{d}_x^\beta$

Paso 3: Búsqueda lineal

Paso 4: Actualización: $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + t_k \mathbf{d}_x$

4.2 Retorne al Paso 1.

Ejemplos: Colección de Hock y Shitkowski

Comparación del número de iteraciones

112 problemas de pequeño tamaño $\approx 2 - 16$ variables.

	Resolvió	Falló*	Fue el mejor**	Fue el peor***
FDIPA	104 (92.9%)	8 (7.1%)	13	71
FAIPA	103 (92.0%)	9 (8.0%)	24	62
FDIPA-H	104 (92.9%)	8 (7.1%)	84	19

(*) Falló: Error de ejecución o más de 100 iteraciones para alcanzar la tolerancia exigida.

(**) Mejor: realizó un número de iteraciones menor o igual a los otros dos.

(***) Peor: realizó un número de iteraciones mayor o igual a los otros dos.

Ejemplos: Colección CUTE

- ▶ 150 problemas de grande porte: 1000 – 50000 variables.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
 - ▶ Ingeniería Mecánica.
- ▶ Formulaciones SAND: problemas grandes y esparzos.
- ▶ Las funciones tienen la propiedad de separabilidad parcial.
- ▶ El costo de cálculo de la matriz hessiana es pequeño.
- ▶ Es un conjunto de problemas muy importante para los cuales los algoritmos de punto interior basados en la iteración de Newton son ideales.

Ejemplos: Colección CUTE

- ▶ 150 problemas de grande porte: 1000 – 50000 variables.
 - ▶ Economía.
 - ▶ Control óptimo.
 - ▶ Optimización de redes.
 - ▶ Ingeniería Mecánica.
- ▶ Formulaciones SAND: problemas grandes y esparzos.
- ▶ Las funciones tienen la propiedad de separabilidad parcial.
- ▶ El costo de cálculo de la matriz hessiana es pequeño.
- ▶ **Es un conjunto de problemas muy importante para los cuales los algoritmos de punto interior basados en la iteración de Newton son ideales.**

Ejemplos: Colección CUTE

Comparación del número de iteraciones

	Resolvió	Falló*	Fue el mejor**	Fue el peor***
KNITRO	93 (62.0%)	57 (38.0%)	31	76
LOQO	138 (92.0%)	12 (8.0%)	39	43
FDIPA-H	114 (76.0%)	36 (24.0%)	81	40
SNOPT	62 (41.3%)	88 (58.7%)	-	-
FDIPA	61 (40.6%)	89 (59.3%)	-	-
FAIPA	59 (39.3%)	91 (60.7%)	-	-

(*) La comparación comprende los algoritmos KNITRO, LOQO y FDIPA-H.

(*) Falló: Error de ejecución, más de 3000 iteraciones o más de 20 min de ejecución.

(**) Mejor: realizó un número de iteraciones menor o igual a los otros dos.

(***) Peor: realizó un número de iteraciones mayor o igual a los otros dos.

Conclusiones sobre o FDIPA-H

- 1) El algoritmo tiene convergencia global (Teorema 3.50)
- 2) Es muy eficiente para los problemas de grande porte de la colección CUTE.

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

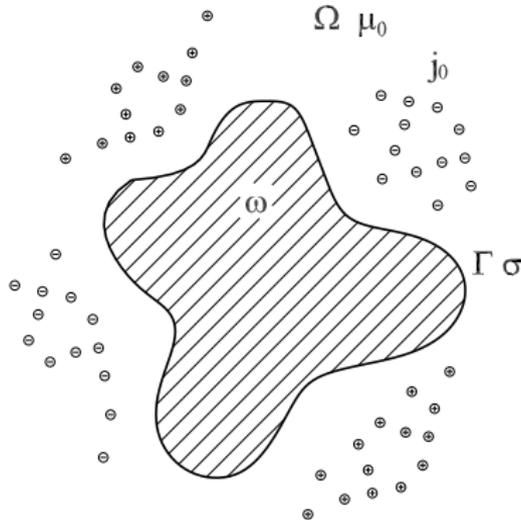
Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Problema de Fundición Electromagnética



El modelo aquí considerado asume que la frecuencia de la corriente eléctrica es muy alta y, por lo tanto, el campo magnético penetra una distancia despreciable en el interior del metal líquido.

Problema de Fundición Electromagnética



Ecuaciones del campo magnético

Michel Pierre, Jean R. Roche (1991)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}_0 \quad \text{en } \Omega \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (22)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nu = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (23)$$

$$\|\mathbf{B}\| = O(\|x\|^{-1}) \quad \text{cuando } \|x\| \rightarrow \infty \text{ en } \Omega \quad (24)$$

ω : dominio ocupado por el metal líquido.

Γ : contorno de ω .

$\Omega = \mathbb{R} \setminus \omega$ es el exterior del metal líquido.

$\mathbf{j}_0 = (0, 0, j_0)$ es el vector de densidad de corriente eléctrica.

$\mathbf{B} = (B_1, B_2, 0)$ vector de campo magnético.

μ_0 : permeabilidad magnética del vacío.

ν : vector unitario normal a la superficie Γ .

Equilibrio y restricciones

Además de eso tenemos la ecuación de equilibrio:

$$\frac{1}{2\mu_0} \|\mathbf{B}\|^2 + \sigma C = \bar{p} \quad \text{constante en } \Gamma \quad (25)$$

Y la ecuación del volumen:

$$\int_{\omega} d\Omega = S_0 \quad (26)$$

Se asume también que j_0 tiene soporte compacto y verifica:

$$\int_{\Omega} j_0 d\Omega = 0 \quad (27)$$

Función flujo magnético

Con esto, existe la función **flujo magnético** $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{B} = (\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, 0)$ y φ es solución de las ecuaciones de estado:

$$-\Delta \varphi = \mu_0 j_0 \quad \text{en } \Omega \tag{28}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{en } \Gamma \tag{29}$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = O(1) \quad \text{cuando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \tag{30}$$

El equilibrio en términos del flujo φ queda:

$$\frac{1}{2\mu_0} \|\nabla \varphi\|^2 + \sigma C = \bar{p} \quad \text{constante en } \Gamma \tag{31}$$

Problema variacional

La formulación variacional consiste en encontrar ω como un punto crítico del funcional Energía Total:

$$E(\omega) = -\frac{1}{2\mu_0} \int_{\Omega} \|\nabla\varphi_{\omega}\|^2 d\Omega + \sigma \int_{\Gamma} d\Gamma, \quad (32)$$

sujeto a la restricción de igualdad en la área de ω :

$$\int_{\omega} d\Omega = S_0. \quad (33)$$

donde φ_{ω} verifica:

$$-\Delta\varphi_{\omega} = \mu_0 j_0 \quad \text{en } \Omega \quad (34)$$

$$\varphi_{\omega} = 0 \quad \text{en } \Gamma \quad (35)$$

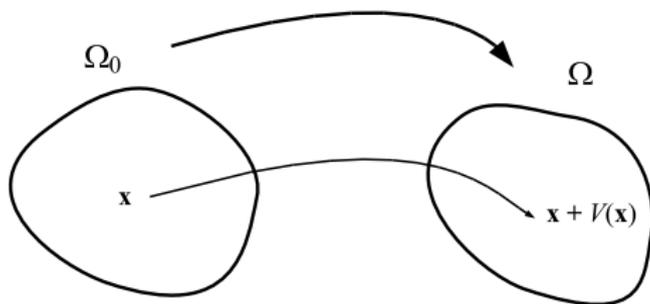
$$\varphi_{\omega}(\mathbf{x}) = O(1) \quad \text{cuando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad (36)$$

Diferenciación en relación a la forma

Para caracterizar los puntos críticos utilizamos el concepto de diferenciación en relación a la forma.

Para un dominio de referencia Ω_0 , son consideradas las transformaciones:

$$T = Id + V, \quad \text{con} \quad V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad \|V\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)} < 1, \quad (37)$$



Definición del dominio transformado por el campo vectorial V .

Condición de equilibrio

Función lagrangeana:

$$L(\omega, \bar{p}) = E(\omega) - \bar{p}(S(\omega) - S_0), \quad (38)$$

donde \bar{p} es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción de área.

Condición de punto crítico:

$$L'(\omega, \bar{p})(V) = 0, \quad \forall V \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2). \quad (39)$$

Teorema 5.1 Condición de equilibrio del problema variacional:

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\mu_0} \|\nabla\varphi\|^2 + \sigma\mathcal{C} - \bar{p} \right) (V \cdot \nu) \, d\Gamma = 0 \quad \forall V \text{ in } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2). \quad (40)$$

Solución de la ecuación de estado

Para hallar la solución consideramos una solución particular φ_1 :

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| j_0(\mathbf{y}) d\Omega \quad (41)$$

Entonces, la función φ puede ser calculada como:

$$\varphi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) + \varphi_1(\mathbf{x}) \quad (42)$$

donde la función v es solución de:

$$-\Delta v(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (43)$$

$$v(\mathbf{x}) = -\varphi_1(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Gamma \quad (44)$$

$$v(\mathbf{x}) = O(1) \quad \text{cuando } \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad (45)$$

Solución de la ecuación homogénea

Una representación integral de v es dada por:

$$v(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} q(\mathbf{y}) \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| d\Gamma + c \quad (46)$$

donde c es el valor en el infinito, y $q \in H^{-1/2}(\Gamma)$ debe verificar:

$$\int_{\Gamma} q(\mathbf{x}) d\Gamma = 0 \quad (47)$$

Las condiciones de contorno en Γ son impuestas en forma débil:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) \int_{\Gamma} q(\mathbf{y}) \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| d\Gamma d\Gamma + c \int_{\Gamma} g(\mathbf{x}) d\Gamma \\ & = - \int_{\Gamma} \varphi_1(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\Gamma \quad \forall g \in H^{-1/2}(\Gamma) \end{aligned} \quad (48)$$

Resumen de las ecuaciones del problema directo

- ▶ En resumen, tenemos las ecuaciones de estado:

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} g(x) \int_{\Gamma} q(y) \ln \|x - y\| d\Gamma d\Gamma + c \int_{\Gamma} g(x) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \varphi_1(x) g(x) d\Gamma \quad \forall g \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (49)$$

$$\int_{\Gamma} q(x) d\Gamma = 0 \quad (50)$$

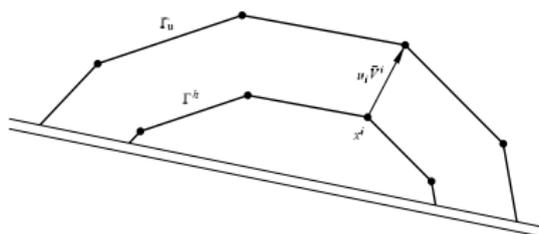
- ▶ La restricción de igualdad en la área de ω :

$$\int_{\omega} d\Omega = S_0 \quad (51)$$

- ▶ La ecuación de equilibrio en el contorno:

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{1}{2\mu_0} \|\nabla\varphi\|^2 + \sigma C - \bar{p} \right) (V \cdot \nu) d\Gamma = 0 \quad \forall V \text{ in } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad (52)$$

Discretización



Se define la transformación paramétrica $T_{\mathbf{u}}$ como:

$$T_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + V_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (53)$$

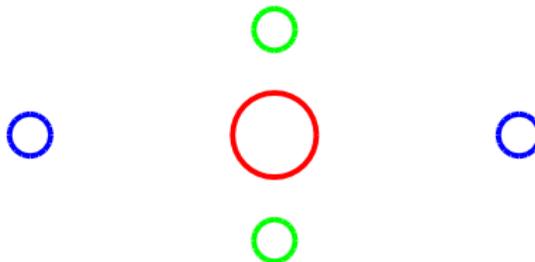
$$V_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n u_i V^i(\mathbf{x}) \quad (54)$$

donde $\mathbf{u}^T = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ es el vector de las incógnitas que determinan la evolución del contorno. Entonces, el contorno actualizado $\Gamma_{\mathbf{u}}$ es dado por:

$$\Gamma_{\mathbf{u}} = \left\{ X \mid X = \mathbf{x} + V_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in \Gamma^h \right\} \quad (55)$$

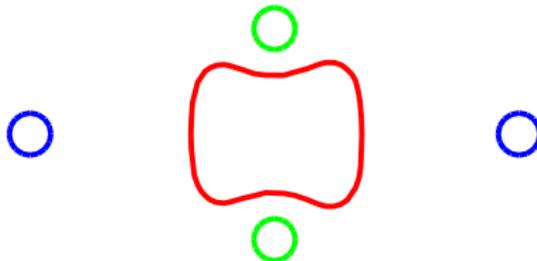
Ejemplo

Iter 0



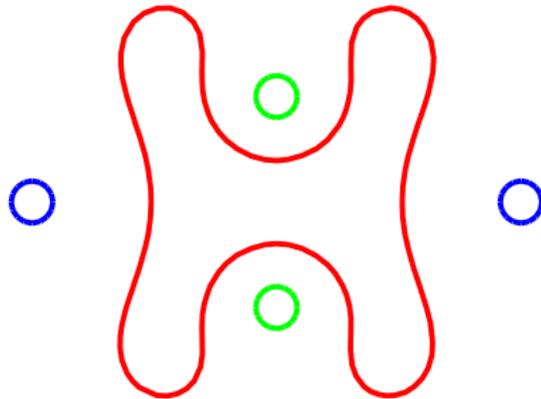
Ejemplo

Iter 4



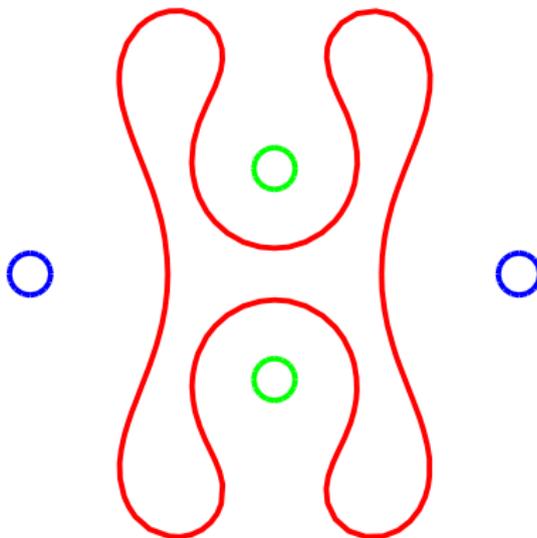
Ejemplo

Iter 10

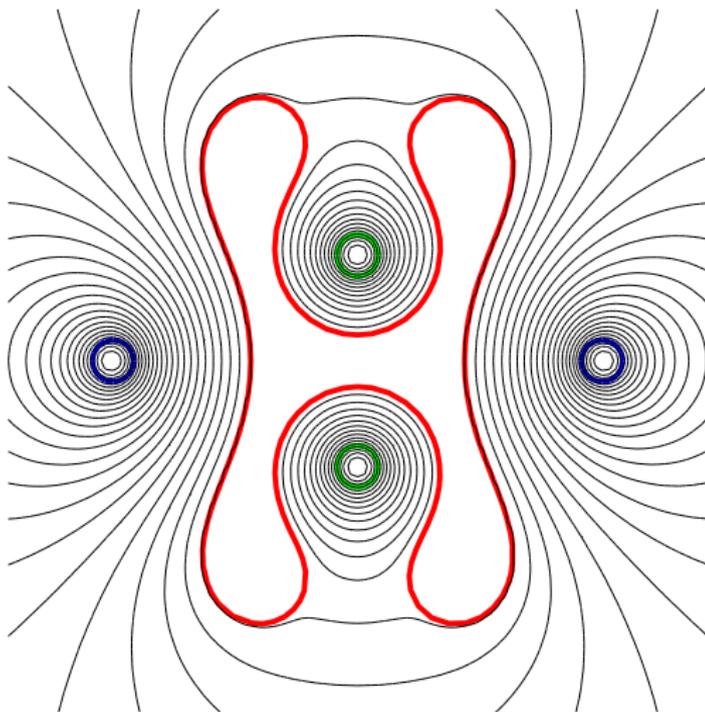


Ejemplo

Iter 29



Ejemplo



Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

Problema Inverso

- ▶ **Encontrar la configuración de inductores** para tener ω aproximadamente igual a una forma objetivo ω^*
- ▶ Dos formulaciones son propuestas:
 - 1) Minimización de la “distancia” entre la forma objetivo y la forma en equilibrio.
 - 2) Minimización de la presión ficticia que equilibra la forma objetivo.
- ▶ Optimización de la posición de los inductores.
- ▶ Optimización de la forma de los inductores.

Problema Inverso

- ▶ **Encontrar la configuración de inductores** para tener ω aproximadamente igual a una forma objetivo ω^*
- ▶ Dos formulaciones son propuestas:
 - 1) Minimización de la “distancia” entre la forma objetivo y la forma en equilibrio.
 - 2) Minimización de la presión ficticia que equilibra la forma objetivo.
- ▶ Optimización de la posición de los inductores.
- ▶ Optimización de la forma de los inductores.

Problema Inverso

- ▶ **Encontrar la configuración de inductores** para tener ω aproximadamente igual a una forma objetivo ω^*
- ▶ Dos formulaciones son propuestas:
 - 1) Minimización de la “distancia” entre la forma objetivo y la forma en equilibrio.
 - 2) Minimización de la presión ficticia que equilibra la forma objetivo.
- ▶ Optimización de la posición de los inductores.
- ▶ Optimización de la forma de los inductores.

Problema Inverso - Primera formulación

La primera formulación considera una deformación del dominio ω^* definida por el mapeamiento siguiente:

$$T_Z(x) = (Id + Z)(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad (56)$$

donde Z es regular y tiene soporte compacto en \mathbb{R}^2 . Definiendo:

$$\omega_Z = T_Z(\omega^*) \quad (57)$$

$$\Gamma_Z = T_Z(\Gamma^*) \quad (58)$$

Primera formulación del problema inverso:

$$\min_{j_0, Z} \|Z\|_{L^2(\Gamma^*)}^2$$

sujeto a: (59)

ω_Z en equilibrio bajo j_0

Problema Inverso - Segunda formulación

Considerando una función de holgura $p(x) : \Gamma^* \rightarrow \mathbb{R}$ de forma que la ecuación de equilibrio sea verificada para el dominio objetivo:

$$\int_{\Gamma^*} \left(\frac{1}{2\mu_0} \|\nabla \varphi_\omega\|^2 + \sigma \mathcal{C} - \bar{p} + p \right) (V \cdot \nu) d\Gamma = 0 \quad \forall V \text{ in } C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2) \quad (60)$$

La función p puede ser interpretada como una presión adicional actuando en la interface.

Segunda formulación del problema inverso:

$$\begin{aligned} & \min_{j_0, p} \|p\|_{L^2(\Gamma^*)}^2 \\ & \text{sujeto a:} \\ & \omega^* \text{ en equilibrio bajo la acción de } j_0 \text{ y } p \end{aligned} \quad (61)$$

Comparación de las formulaciones

Primera formulación:

- 1) Halla la forma en equilibrio.
- 2) En general encuentra soluciones más aproximadas a la forma objetivo.

Segunda formulación:

- 1) No tiene variables relacionadas a la forma del metal líquido.
- 2) El análisis de sensibilidad es más simple.
- 3) El costo computacional del proceso de optimización es menor para esta formulación.
- 4) Si fuese necesario, el resultado puede ser utilizado como punto inicial de la primera formulación.

Optimización de la posición de los inductores

La densidad de corriente eléctrica j_0 es asumida de la forma:

$$j_0 = I \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_i \delta_{x_i}, \quad (62)$$

En este caso la expresión para la función φ_1 es:

$$\varphi_1(x) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_i \ln \|x - x_i\|. \quad (63)$$

x_i variables de proyecto del problema.

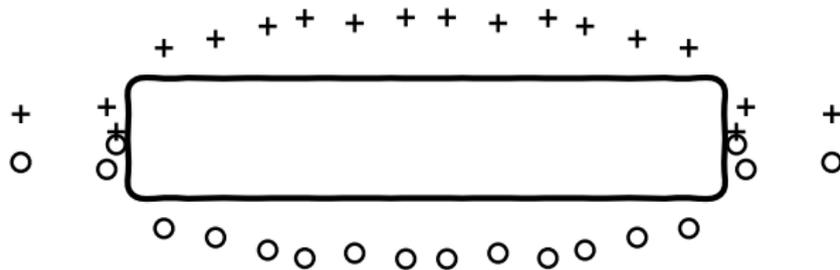
Ejemplo 3

Configuración Inicial



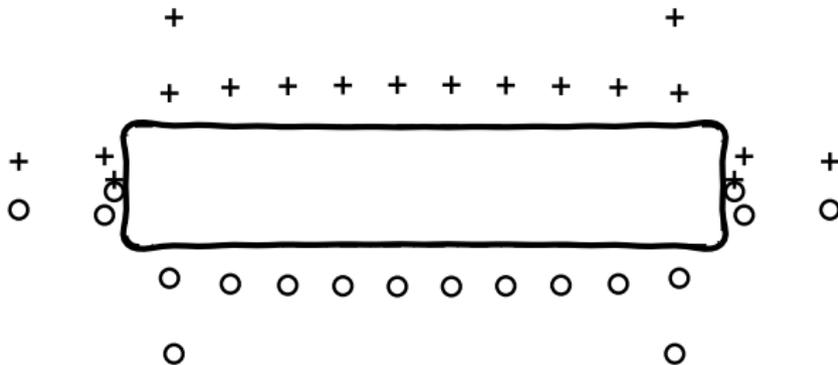
Ejemplo 3

Primera formulación



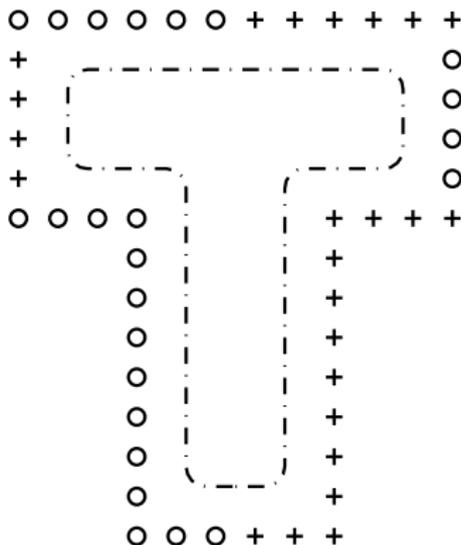
Ejemplo 3

Segunda formulación



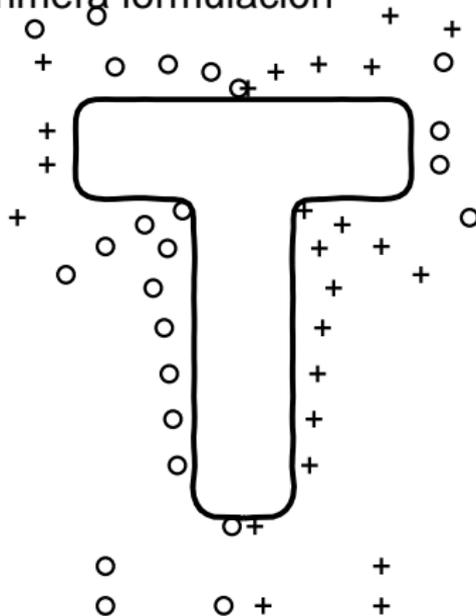
Ejemplo 4

Configuración Inicial



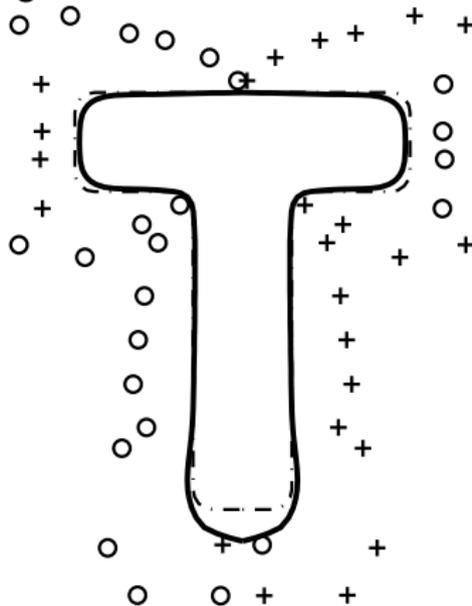
Ejemplo 4

Resultado de la Primera formulación

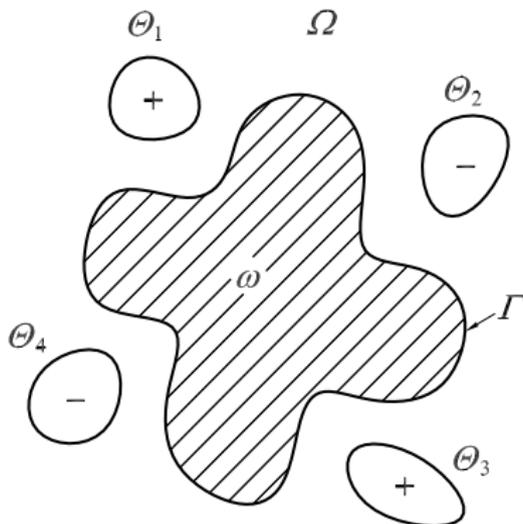


Ejemplo 4

Resultado de la Segunda formulación



Optimización de forma de los inductores



La hipótesis de densidad uniforme es válida para el caso en que el inductor es compuesto por filamentos entrelazados y aislados unos de otros (Litz-Wire).

Optimización de forma de los inductores

La densidad de corriente eléctrica j_0 es asumida de la forma:

$$j_0 = I \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_i \chi_{\Theta_i}, \quad (64)$$

En este caso la expresión para la función φ_1 es:

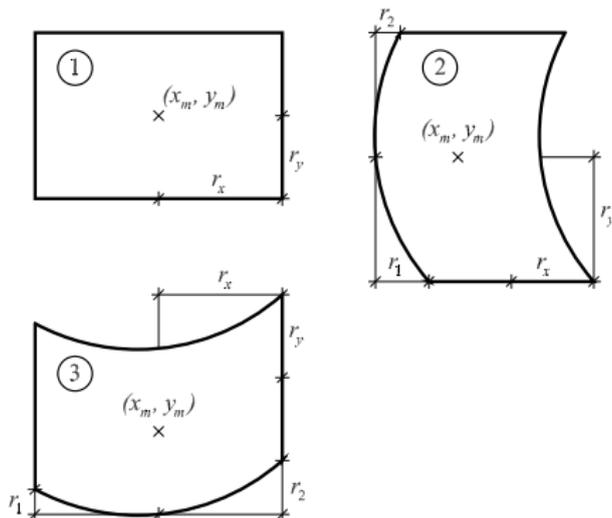
$$\varphi_1(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_i \int_{\Theta_i} \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| d\Omega_y. \quad (65)$$

Sea $w : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

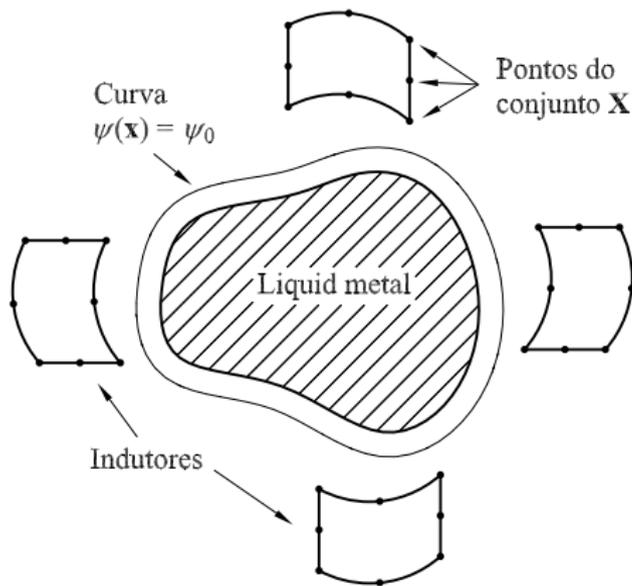
$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (1/4)(1 - 2 \ln \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (66)$$

$$\varphi_1(\mathbf{x}) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{i=1}^{n_c} \alpha_i \int_{\Gamma_i} w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \nu d\Gamma_y. \quad (67)$$

Inductores



Restricciones geométricas



Problema Inverso

Restricciones geométricas

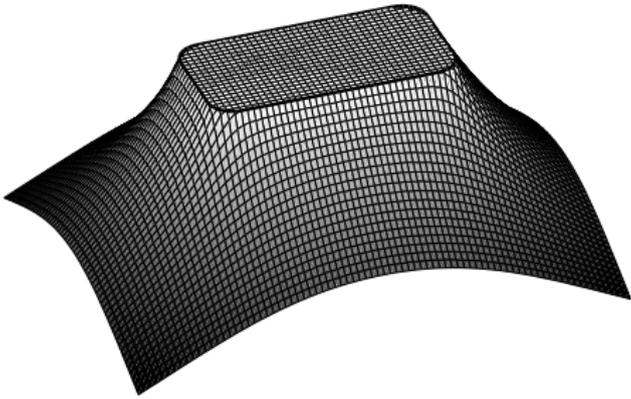
La función ψ propuesta es definida por la solución de:

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\mathbf{x}) &= 0 && \text{in } \Omega^*, \\ \psi(\mathbf{x}) &= 0 && \text{on } \Gamma^*, \\ \int_{\Gamma^*} \nabla\psi(\mathbf{x}) \cdot \nu \, d\Gamma &= -1. \end{aligned} \tag{68}$$

Definiendo $\psi_j(\mathbf{u}_c) = \psi(\mathbf{x}_j(\mathbf{u}_c)) - \psi_0$, las restricciones geométricas quedan:

$$\psi(\mathbf{u}_c) \leq 0. \tag{69}$$

Restricciones geométricas



Función ψ

Contenido

Preliminares

Objetivo y Motivación

Algoritmo FDIPA-H

Problema de Optimización No Linear

Algoritmo FDIPA

Algoritmo FDIPA-H

Fundición Electromagnética

Problema directo

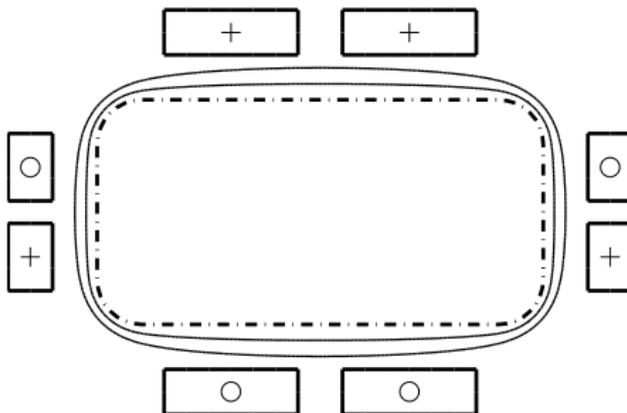
Problema Inverso

Ejemplos

Conclusiones

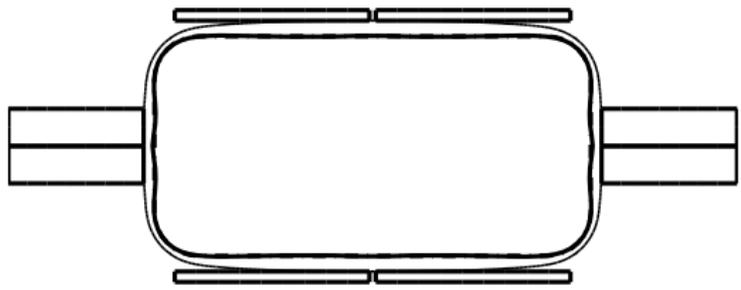
Ejemplo 3

Configuración Inicial



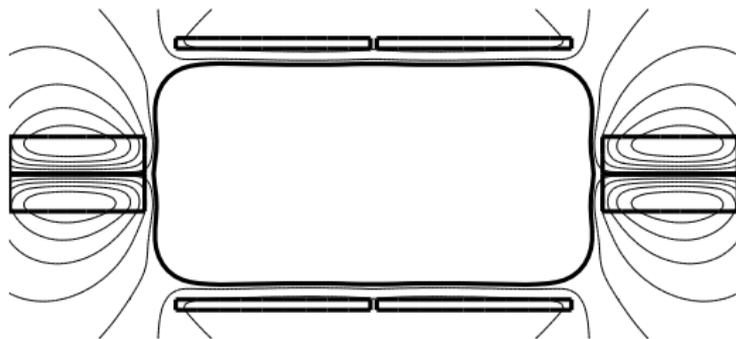
Ejemplo 3

Primera formulación



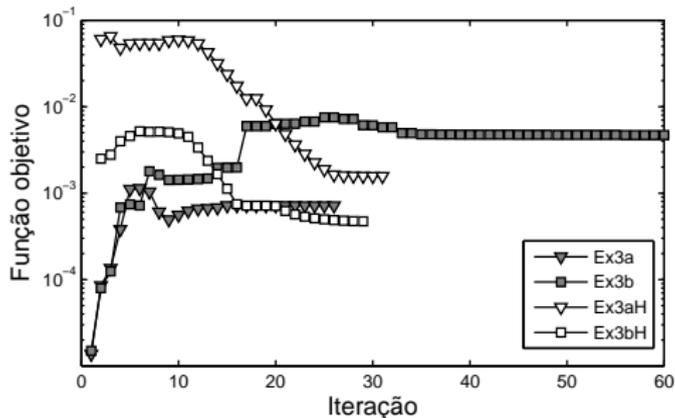
Ejemplo 3

Primera formulación



Ejemplo 3

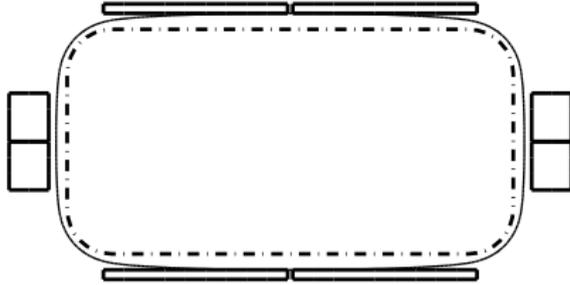
Primera formulación



Evolución de la función objetivo

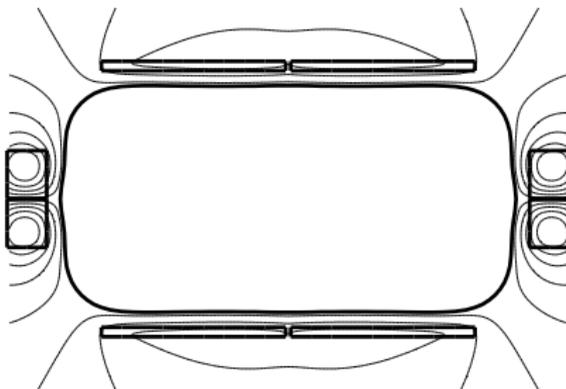
Ejemplo 3

Segunda formulación



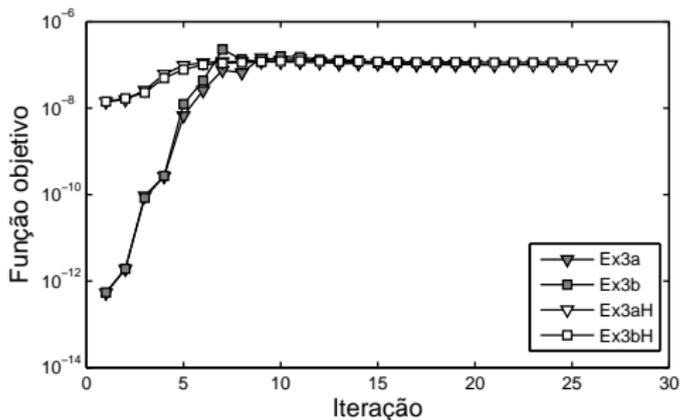
Ejemplo 3

Segunda formulación



Ejemplo 3

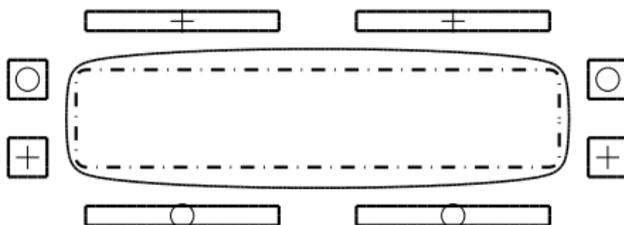
Segunda formulación



Evolución de la función objetivo

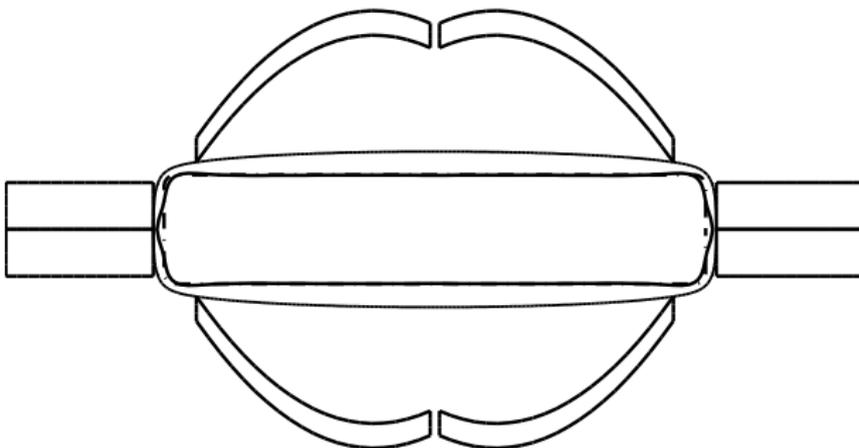
Ejemplo 5

Configuración Inicial



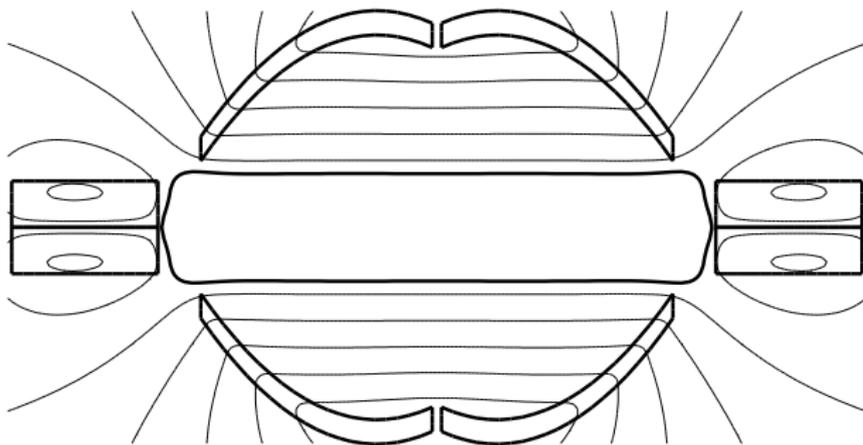
Ejemplo 5

Primera formulación



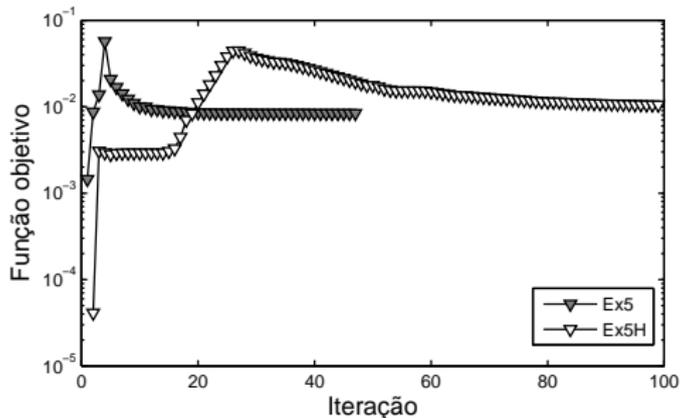
Ejemplo 5

Primera formulación



Ejemplo 5

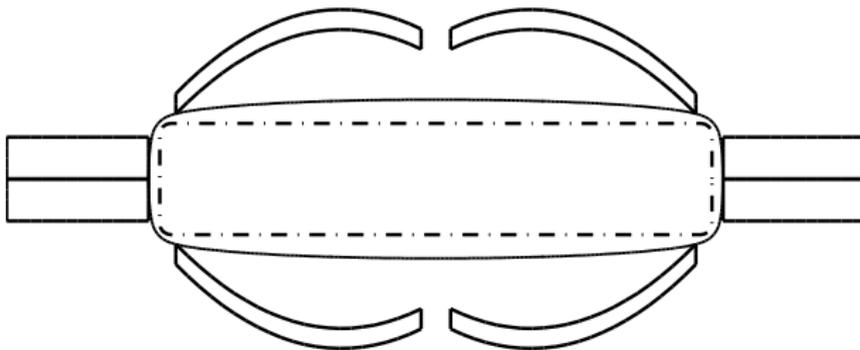
Primera formulación



Evolución de la función objetivo

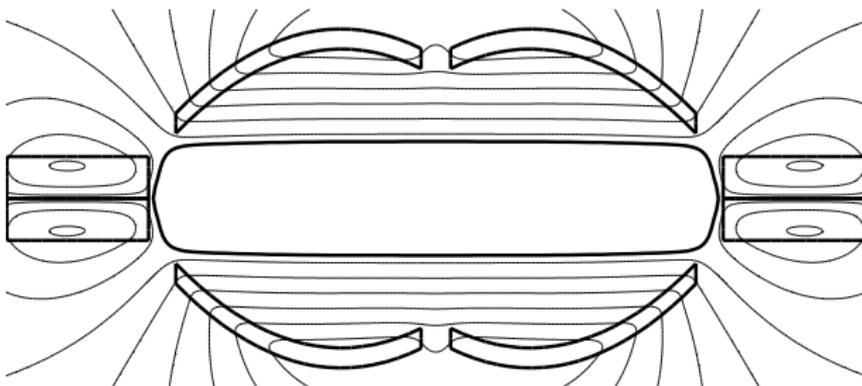
Ejemplo 5

Segunda formulación



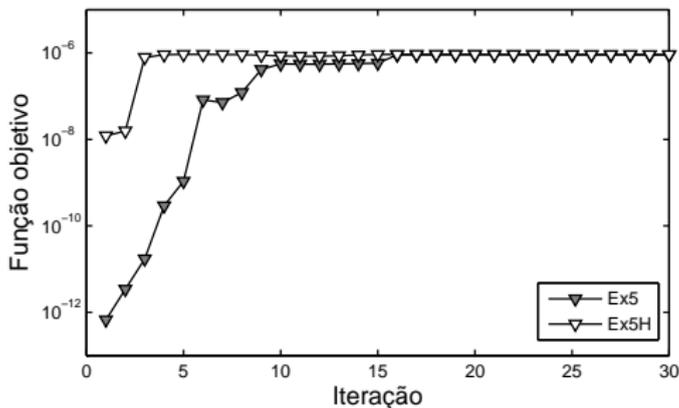
Ejemplo 5

Segunda formulación



Ejemplo 5

Segunda formulación



Evolución de la función objetivo

Conclusiones

- 1) En este trabajo fue propuesto un método para optimización en Ingeniería Mecánica basado en la utilización del MEC, en la formulación SAND y en la utilización de un algoritmo de punto interior.
- 2) Es presentado el algoritmo de optimización FDIPA-H.
 - ▶ Utiliza la matriz hessiana del problema de optimización en los sistemas lineales.
 - ▶ Es muy eficiente para los problemas de grande porte de la colección CUTE.

Trabajos futuros

- ▶ Ver convergencia asintótica.

Conclusiones

- 3) En el Capítulo 4 de la tesis se muestra que para el MEC y usando la formulación SAND la matriz hessiana puede ser calculada eficientemente.
- 4) Fue presentada una aplicación del método propuesto al problema de Fundición Electromagnética.
 - ▶ Dos formulaciones para la solución del problema inverso.
 - ▶ Técnica general para satisfacer las restricciones geométricas de no penetración.

Trabajos futuros

- ▶ Ver el problema de optimización topológica de los inductores.
- ▶ Considerar modelos para bajas frecuencias de la corriente eléctrica.