ROBUST TRUSS TOPOLOGIC DESIGN BY A NEW INTERIOR-POINT ALGORITHM FOR NON-SMOOTH CONVEX PROGRAMMING

José Herskovits Norman
jose@optimize.ufrj.br
Departamento de Engenharia Mecânica, COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Alfredo Canelas
acanelas@fing.edu.uy
Instituto de Estructuras y Transporte, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República.

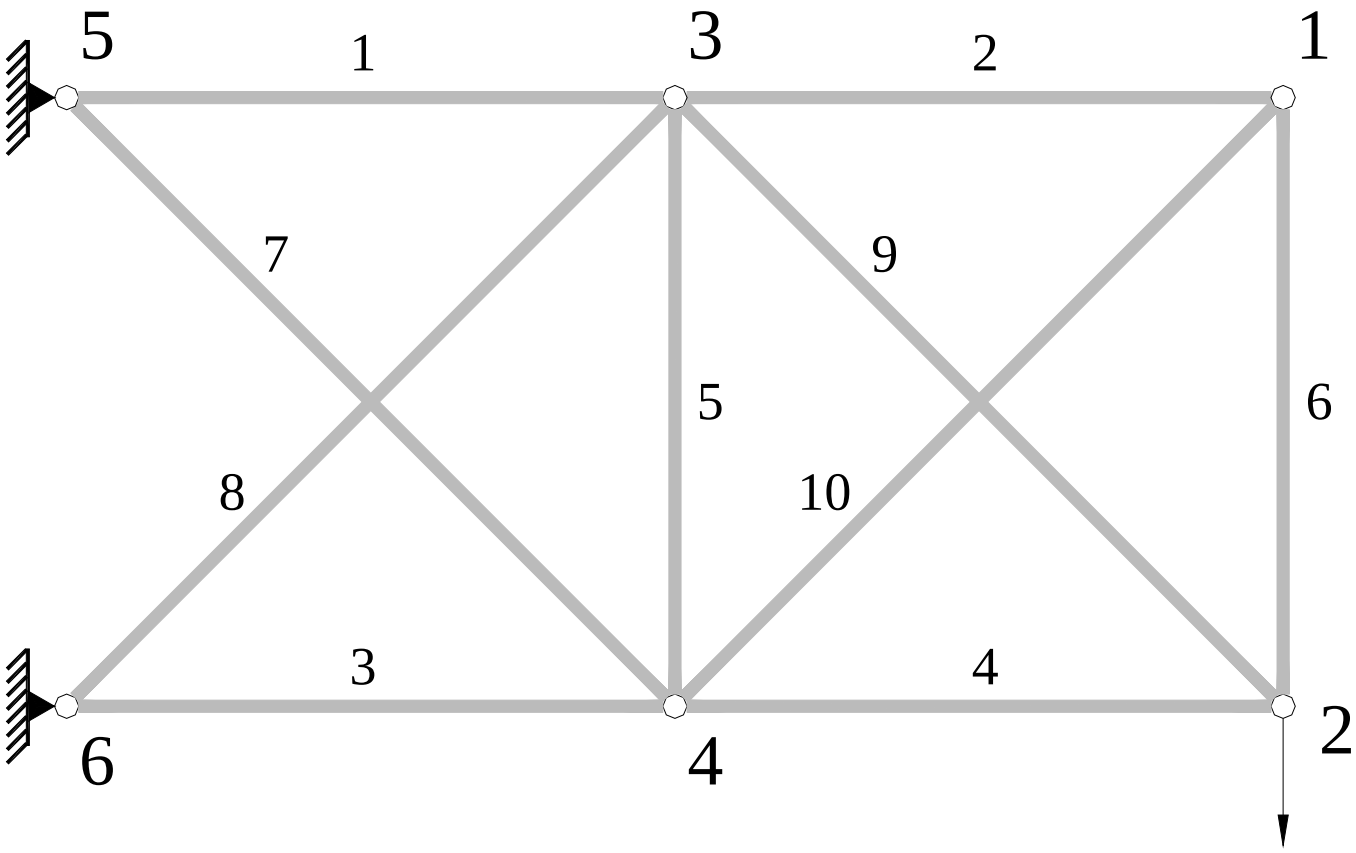
Índice

- Otimização de treliças robustas.
- Formulação do problema de otimização convexo.
- Algoritmo para solução de problemas de otimização convexos.
- Resultados numéricos.
- Conclusões.

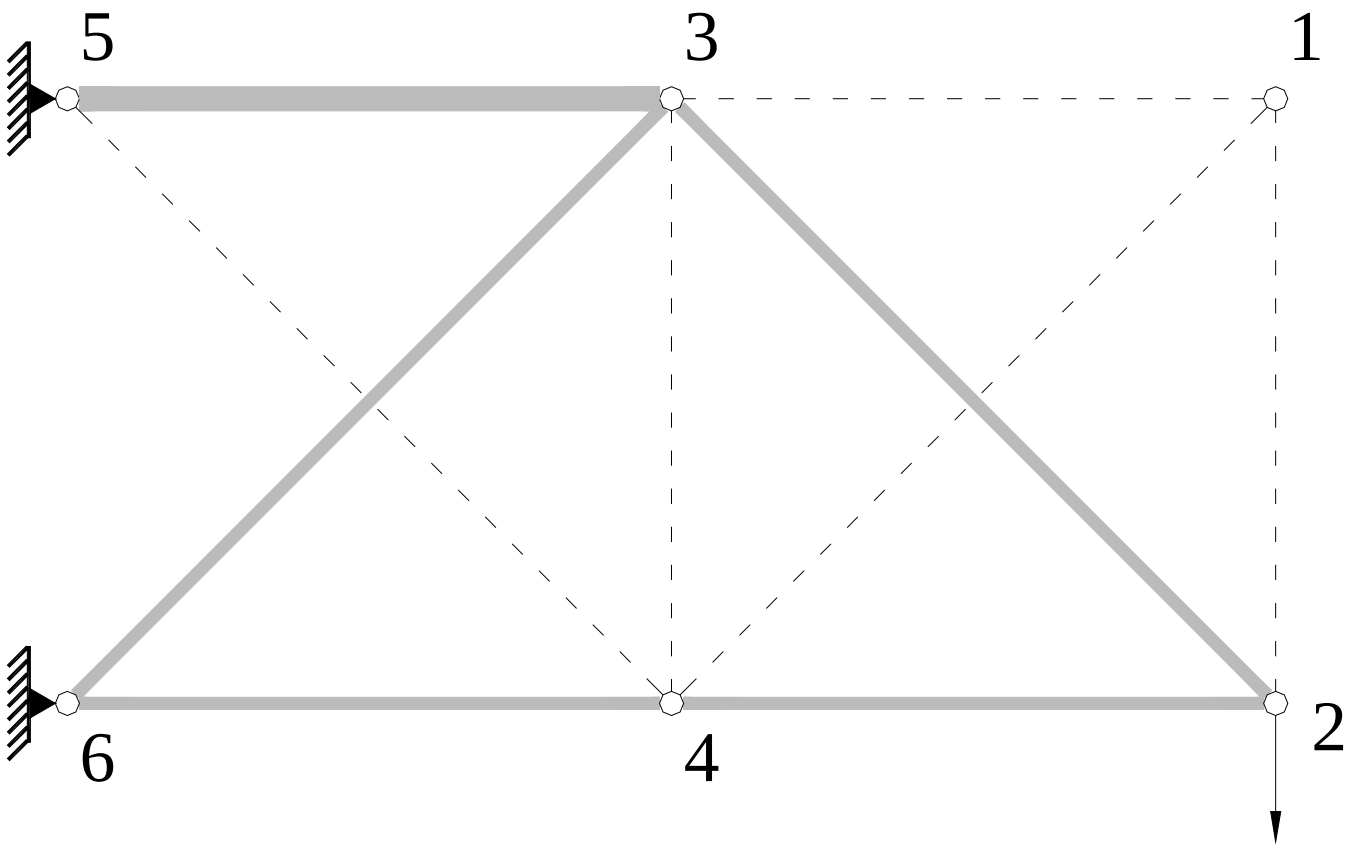
Otimização de treliças robustas

- Problema clássico:
  - Dado um conjunto de *n* nós.
  - Dado um conjunto de *b* arestas.
  - Dado um conjunto de *s* estados de carregamento.
  - Apoios.
  - Dado um volume máximo de material.
  - Variáveis: volumes de material de cada aresta.
  - Problema: minimizar a máxima energia de deformação.
  - Material elástico linear, pequenos deslocamentos.

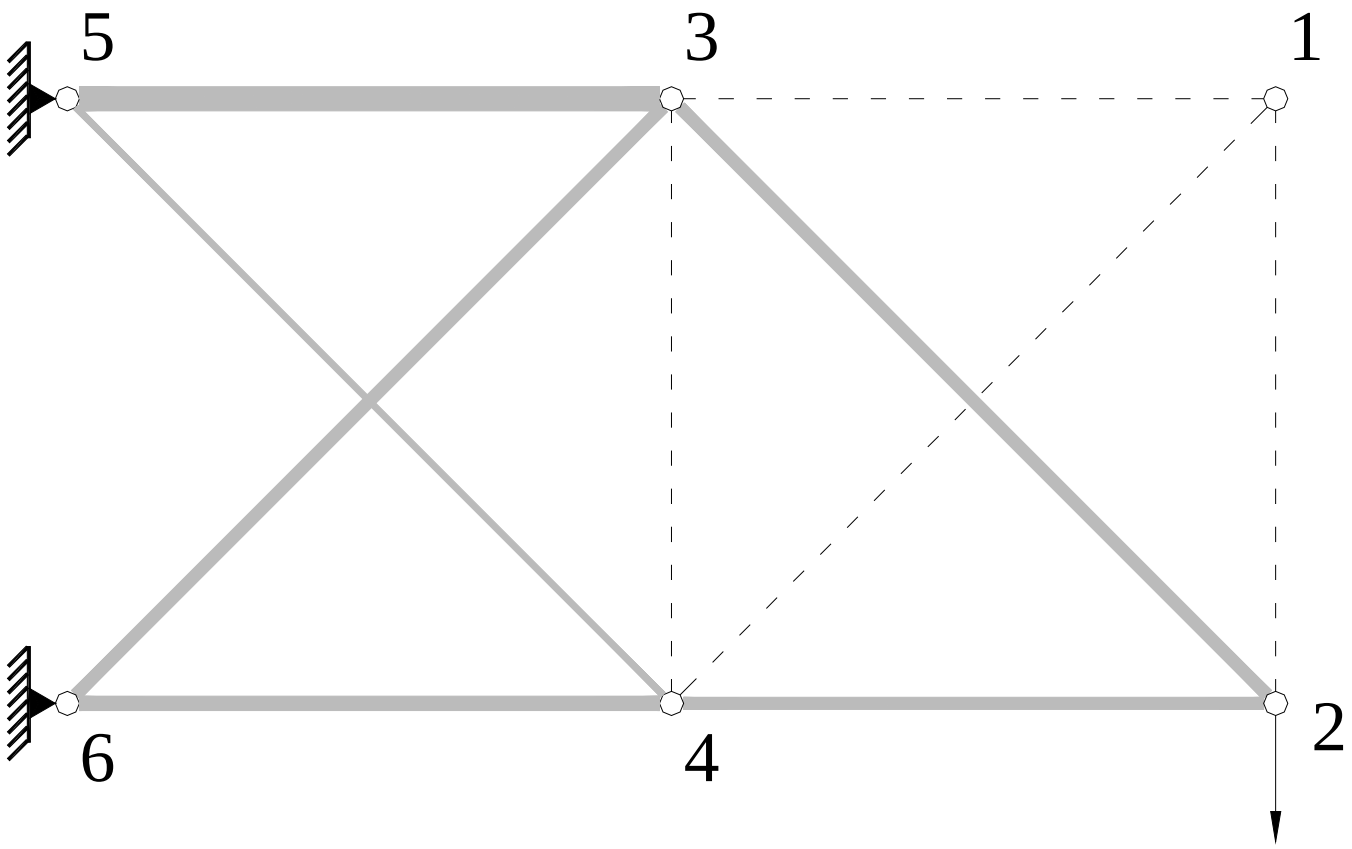
Exemplo



Solução clássica



Solução robusta



Formulação do problema de otimização convexo

- Problema clássico:

$$\min_{\mathbf{t}} \quad \phi(\mathbf{t}) = \max\left\{ \phi_i(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_i^T \mathbf{u}_i(\mathbf{t}) \quad / \quad \begin{array}{c} \mathbf{K}(\mathbf{t})\mathbf{u}_i(\mathbf{t}) = \mathbf{p}_i \\ 1 \le i \le s \end{array} \right\}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{b} t_i \le V$$

$$t_i \ge 0 \quad i = 1,..,b$$

Formulação do problema de otimização convexo

- Problema robusto:

$$\min_{\mathbf{t}} \quad \phi(\mathbf{t}) = \max_{\mathbf{p}} \left\{ \mathbf{p}^T \mathbf{u}(\mathbf{p},\mathbf{t}) \quad / \quad \begin{matrix} \mathbf{K}(\mathbf{t})\mathbf{u}(\mathbf{p},\mathbf{t}) = \mathbf{p} \\ \mathbf{p} \in M \end{matrix} \right\}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{b} t_i \leq V$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1,..,b$$

Formulação do problema de otimização convexo

- M: o menor elipsóide da forma:

$$M = \left\{ \mathbf{Q}\mathbf{w} \,/\, \mathbf{w} \in R^q, \mathbf{w}^T\mathbf{w} \le 1 \right\}$$

$$\mathbf{Q} : R^q \to R^n$$

que inclui:

- O conjunto $P = \{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_s, -\mathbf{p}_1,\ldots,-\mathbf{p}_s\}$ de estados de carregamento principais (e seus opostos).

- A bola $B = \left\{ \mathbf{f} \in R^q, \mathbf{f}^T\mathbf{f} \le r^2 \right\}$ de carregamentos secundários.

Formulação do problema de otimização convexo

$$\mathbf{Q} = \left[\mathbf{p}_1;\ldots;\mathbf{p}_s;r\mathbf{e}_1;\ldots;r\mathbf{e}_{q-s}\right]$$

$\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q-s}$ é uma base ortonormal do complemento ortogonal à expansão linear de P em R_q

$$\tau \geq \phi(\mathbf{t}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tau\mathbf{I}_q & \mathbf{Q}^T \\ \mathbf{Q} & \mathbf{K}(\mathbf{t}) \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\tau \geq \phi(\mathbf{t}) \quad \Leftrightarrow \quad \tau\mathbf{K}(\mathbf{t}) - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \geq 0$$

se e somente se τ é maior ou igual ao maior dos autovalores do problema de autovalores generalizado dado pelas matrizes $\left(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T, \mathbf{K}(\mathbf{t})\right)$

Formulação do problema de otimização convexo

- Problema de otimização convexo:

$$\min_{\mathbf{t}} \quad \phi(\mathbf{t}) = \max\left\{ \lambda_i \quad / \quad \det\left(\lambda_i \mathbf{K}(\mathbf{t}) - \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T\right) = 0 \right\}$$

Sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{b} t_i \leq V$$

$$t_i \geq 0 \quad i = 1,..,b$$

Algoritmo para solução de problemas convexos

Neste trabalho foi utilizado o algoritmo proposto por Wilhelm Passarella, José Herskovits, Susana Scheimberg e Regina Burachik.

Seja o problema:

$$\min_{x \in R^n} \quad F(\mathbf{x})$$ Onde $F(\mathbf{x})$ é uma função convexa.

Um problema equivalente ao anterior é:

$$\min_{z \in R} \quad f(\mathbf{x}, z) = z$$

$$F(\mathbf{x}) \leq z$$

Algoritmo para solução de problemas convexos

Na iteração k se define o seguinte problema auxiliar de programação linear:

$$\min_{z \in R} \quad f(\mathbf{x}, z) = z$$

$$g_0^i(\mathbf{x}, z) \leq 0 \qquad 1 \leq i \leq m$$

Onde as funções que definem as restrições são da forma:

$$g_0^i(\mathbf{x}, z) = F(\mathbf{x}_0^i) + \mathbf{s}(\mathbf{x}_0^i)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0^i) - z \qquad 1 \leq i \leq m$$

Onde $\mathbf{s}(\mathbf{x}_0^i)$ é um subgradiente da função no ponto $\mathbf{x}_0^i$

Algoritmo para solução de problemas convexos

Para este problema auxiliar acha-se a direção de busca $\mathbf{d}_0^k \equiv (\mathbf{d}_{\mathbf{x},0}^k, d_{z,0}^k)$ na mesma forma que o faz o algoritmo de pontos interiores FD_IPA.

Logo se define:

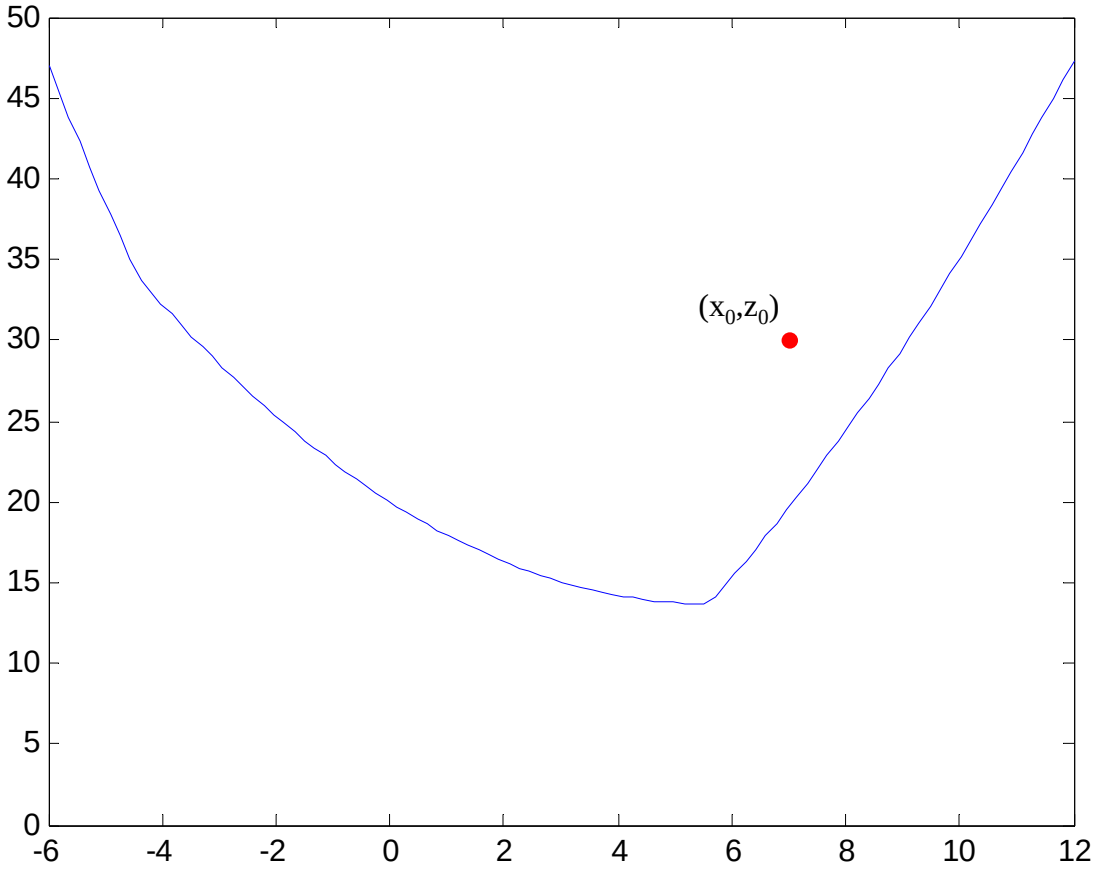
$$\mathbf{x}_0^{m+1} = \mathbf{x}^k + \mu \mathbf{d}_{\mathbf{x},0}^k$$
$$z_0^{m+1} = z^k + \mu d_{z,0}^k$$

Se esse novo ponto satisfaz a restrição do problema convexo se define o próximo ponto da seqüência como:

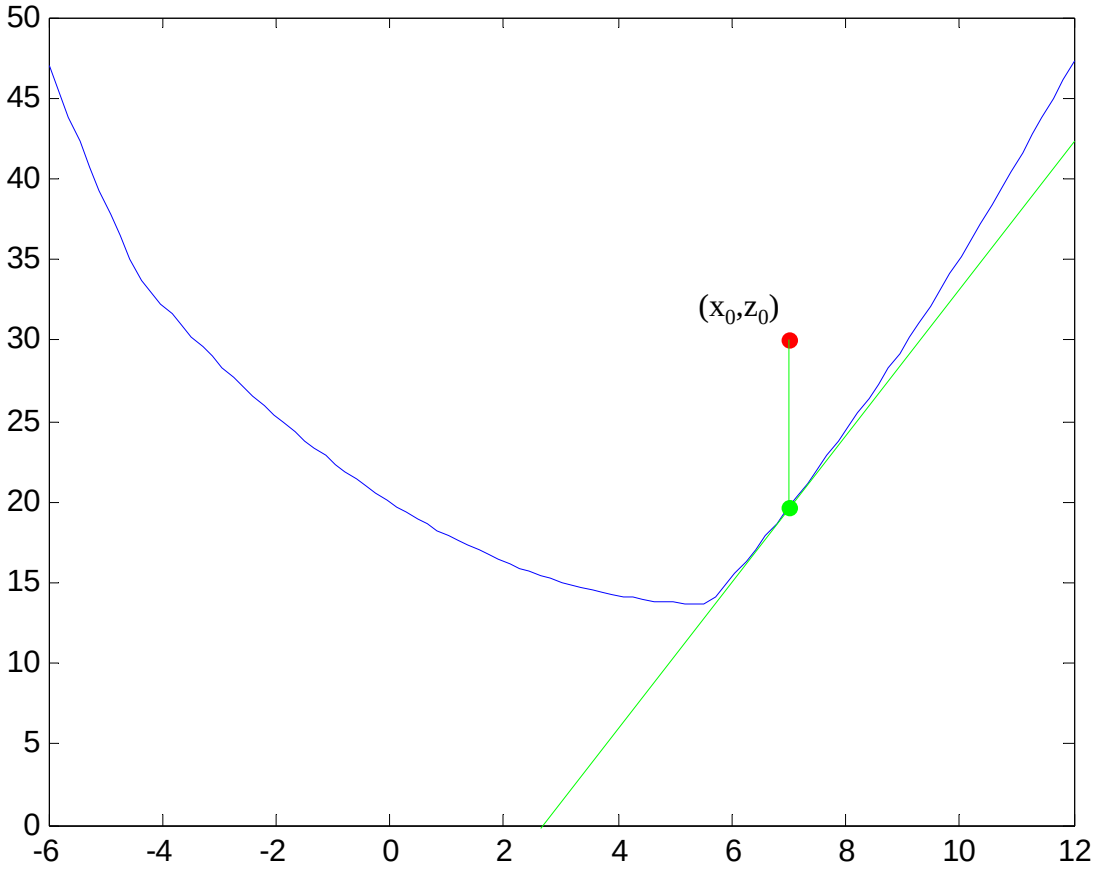
$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}_0^{m+1}$$
$$z^{k+1} = z_0^{m+1}$$

Se não satisfaz, se agrega esse ponto ao conjunto que define as restrições lineares e se acha uma nova direção de busca.

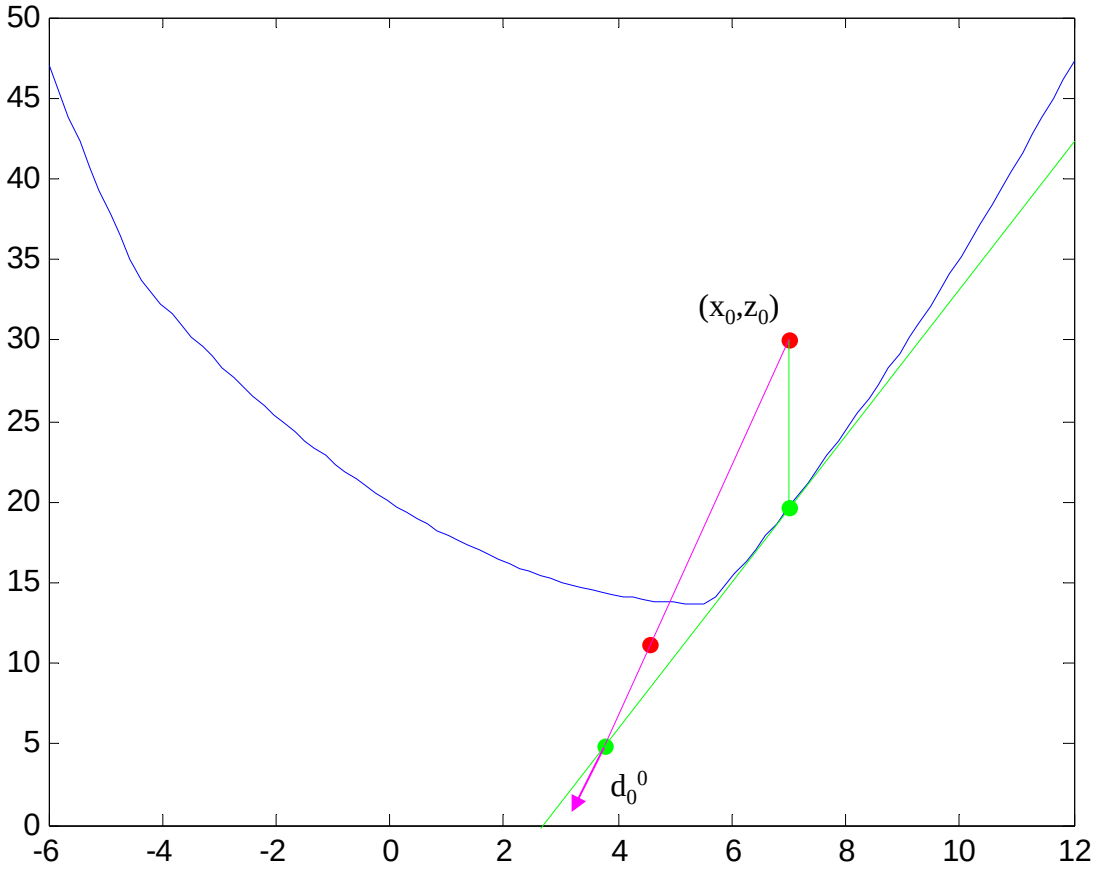
Algoritmo para solução de problemas convexos



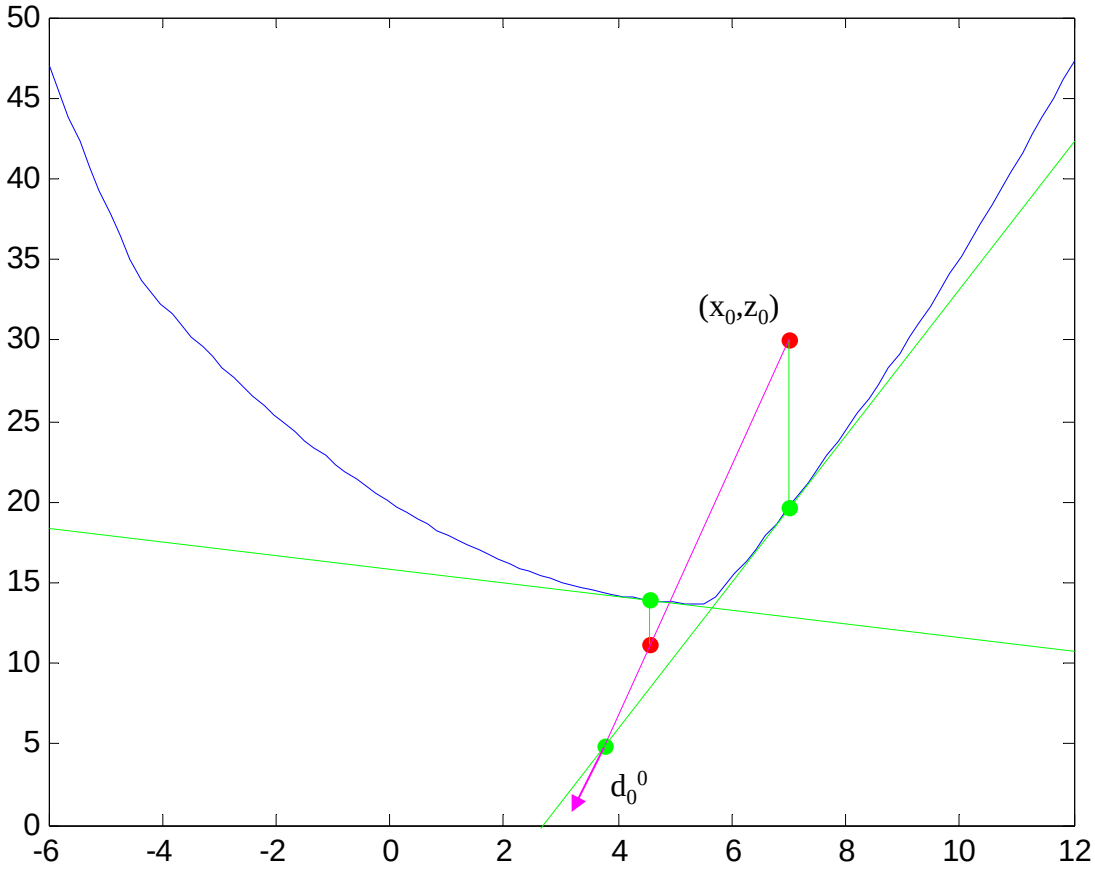
Algoritmo para solução de problemas convexos



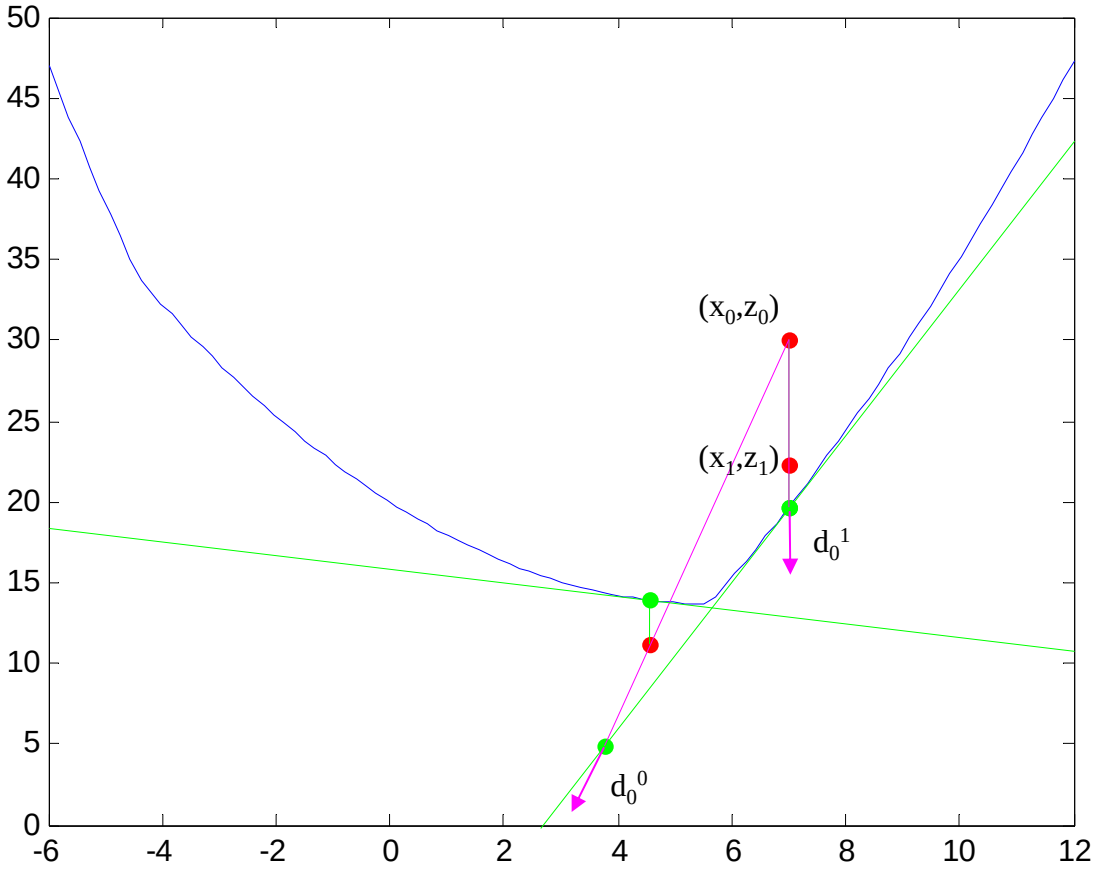
Algoritmo para solução de problemas convexos



Algoritmo para solução de problemas convexos



Algoritmo para solução de problemas convexos



Resultados numéricos

Exemplo	NA	NI	NF	F
1 – C	10	102	171	6.4000E-4
1 – R	10	93	183	6.5260E-4
2 – C	10	60	87	6.4000E-4
2 – R	10	74	159	7.6600E-4
3 – C	22	17	19	4.4103E-3
3 – R	22	14	23	4.4130E-3
4 – C	35	20	59	6.7483E-3
4 – R	35	42	235	6.7503E-3

Conclusões

- Neste trabalho foi mostrado como pode-se realizar um projeto de estrutura de barras usando um novo algoritmo para otimização de problemas convexos. Alguns modelos clássicos de otimização e outro recentemente proposto para otimização robusta foram reformulados para utilizar esta técnica.

- Os exemplos considerados foram resolvidos com um custo computacional aceitável.