



Optimización topológica de estructuras reticuladas robustas

Alfredo Canelas (acanelas@fing.edu.uy)

Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

Evento: Seminario del Proyecto STIC-AMSUD 22-STIC-09

“Robust and Stochastic Modelling of Engineering Problems”
(Chile, Uruguay, Colombia, Francia)

Fecha: 21/09/2023



Introducción

- La idea es presentar algunos avances que hemos realizado en la definición y aplicación de modelos de optimización estructural que conducen a soluciones robustas.
- Como el tema es bastante técnico y no muy atractivo para el público general, primero veremos una presentación más general de la optimización estructural.
- La optimización estructural no es una disciplina nueva: el **monumento persa de Tāq Kasrā**, posee una bóveda en arco, o cáscara de simple curvatura de espesor variable, y su fecha precisa de construcción no se conoce con certeza, pero se situaría entre el tercer y sexto siglo antes de nuestra era.
- La optimización de estructural basada en los conceptos modernos de física y matemáticas sí es una disciplina reciente: podría decirse que se inició en el siglo XX.

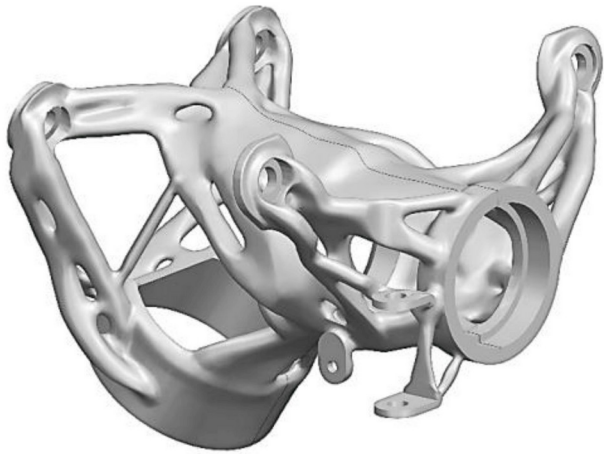


Tāq Kasrā





En ingeniería mecánica





Contenidos

- Métodos analíticos
 - Teoría de Michell-Maxwell
 - Extensiones y limitaciones de la teoría
- Métodos computacionales clásicos
 - “Ground structure approach”: ventajas y desventajas
- Métodos de optimización robusta
 - Método determinístico (formulaciones tipo “peor caso”)
 - Método probabilístico (fuerzas aleatorias)
 - Métodos probabilísticos basados en confiabilidad



Teoría de Michell-Maxwell

LVIII. *The Limits of Economy of Material in Frame-structures.*
By A. G. M. MICHELL, M.C.E., Melbourne*.

MAXWELL has shown † that for all frames under a given system of applied forces

$$\Sigma . l_p f_p - \Sigma . l_q f_q = C, \quad (1)$$

where f_p is the tension in any tie-bar of length l_p , f_q the thrust in any strut of length l_q , and the first sum is taken for all the ties, the second for all the struts. C is shown to be a function of the applied forces and the coordinates of their points of application, and independent of the form of the frame.

Starting from this result, we can find in certain cases lower limits to the quantity of material necessary to sustain given forces, and also assign the forms of frames which attain the limit of economy.

If the greatest tensile stress allowable in the material which is to be employed is P, and the greatest compressive stress Q, the least volume of material in a given frame, consistent with security, is

$$\Sigma . l_p \frac{f_p}{P} + \Sigma . l_q \cdot \frac{f_q}{Q} = V. \quad (2)$$

- En este trabajo Michell busca encontrar la estructura “tipo pórtico” que minimice la cantidad de material utilizada para soportar un conjunto de fuerza externas siendo predefinidos los puntos de apoyo.
- Michell se basó en la idea de un diseño con elementos estructurales tensados o comprimidos hasta su resistencia máxima (fully stressed design).
- El trabajo de Michell fue publicado en 1904 y permaneció prácticamente desconocido por más de 50 años.

Estructuras de Michell

Fig. 1.

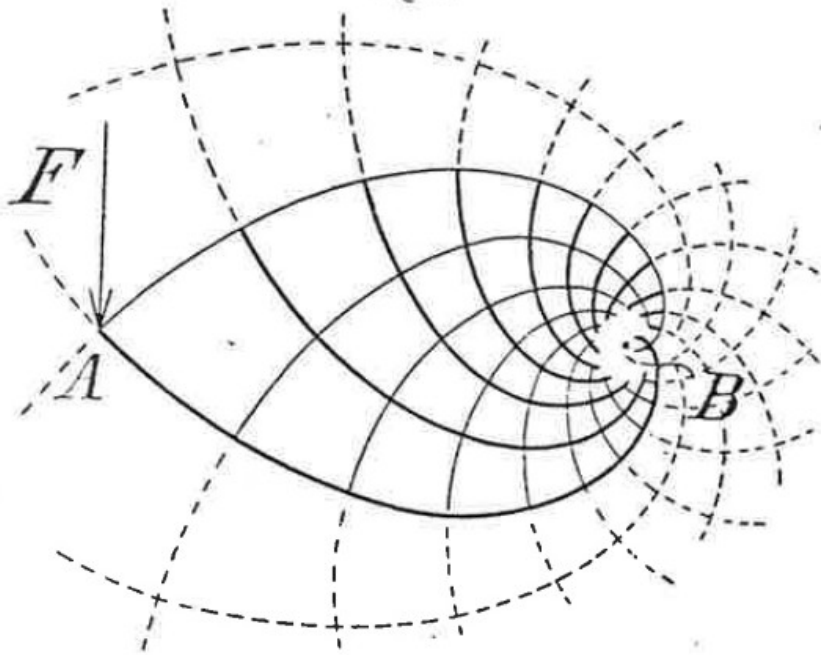
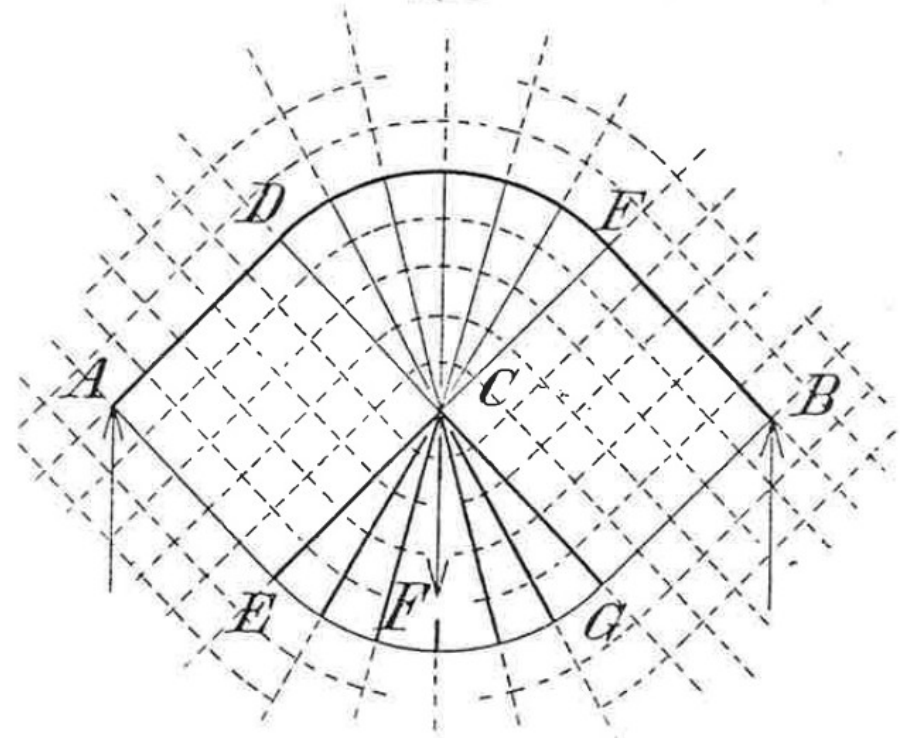


Fig. 2.



Estructuras de Michell

Fig. 3.

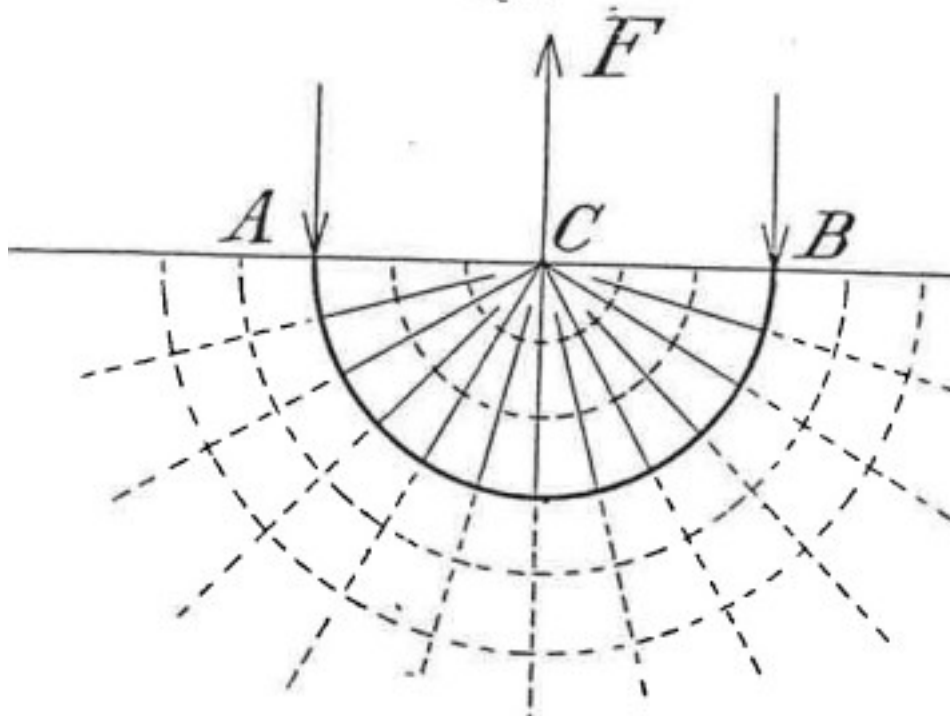
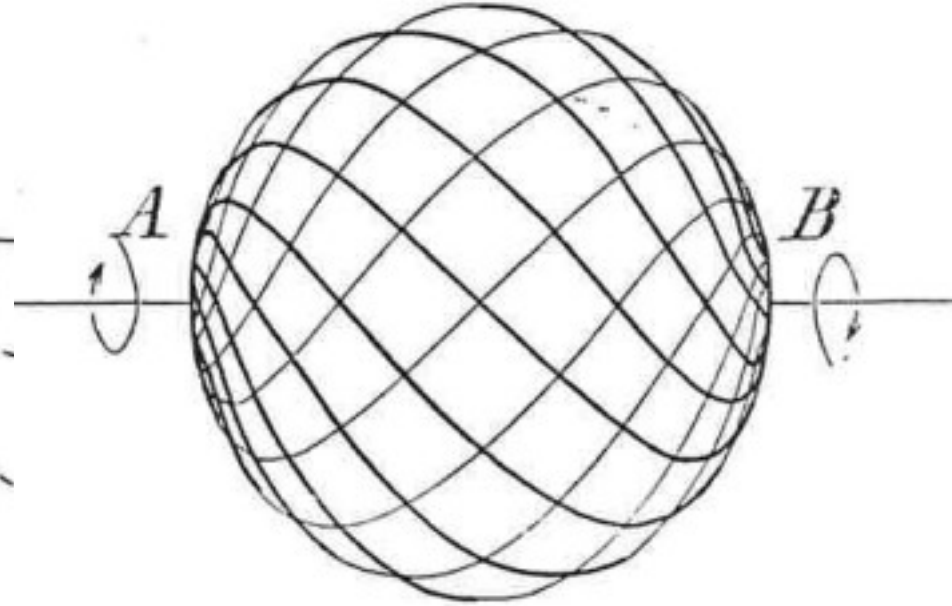


Fig. 5.





Extensiones de la teoría

- **Maxwell, J.C.**, (1870), "On reciprocal figures, frames and diagrams of forces," In Scientific Papers II. Camb. Univ. Press, pp. 160–202.
- **Michell, A.G.M.** (1904) "The Limits of Economy of Material in Frame Structures". Philosophical Magazine, Series 6, 8, 589-597.

A principios de los años 50 del siglo XX J. Foulkes le comenta a H. L. Cox sobre la existencia del trabajo de Michell, quien lo lee y se da cuenta de su importancia teórica. A partir de ahí varios investigadores retoman el trabajo de Michell: Cox, Hemp, Parkes, Owen.

- **Cox, H.L.**, (1958), "The theory of design" MIT.
- **Hemp, W.S.**, (1958), "Theory of structural design" Report 214, North Atlantic Treaty Organization, Advisory Group for Aeronautical Research & Development, Palais de Chaillot, Paris.
- **Cox, H.L.**, (1965), "The design of structures of least weight" Pergamon, Oxford.
- **Parkes, E.W.**, (1965), "Braced Frameworks; an introduction to the theory of structures" Pergamon Press, Oxford, New York
- **Owen, J.B.B.**, (1965), "The Analysis and Design of Light Structures" Edward Arnold (Publishers) Ltd., London.



Otros trabajos importantes:

- **Sved, G.**, (1954), "The minimum weight of certain redundant structures," Aust J Appl Sci, 5, pp. 1–9.
- **Prager, W.**, (1959), "On a problem of optimal design," In Non-homogeneity in elasticity and plasticity, W. Olszak, ed., International Union of Theoretical and Applied Mechanics, Pergamon Press.
- **Drucker, D.C., and Shield, R.**, (1957), "Bounds on minimum weight design," Quarterly of Applied Mathematics, 15(3), pp. 269–281.
- **Hegemier, G.A., and Prager, W.**, (1969), "On Michell Trusses," International Journal of Mechanical Sciences, 11(2), pp. 209–215.

Se recomiendan las lecturas de los trabajos:

- **Chan, A.S.L.** (1960) "The Design of Michell Optimum Structures" Report No. 3303. Aeronautical Research Council Reports & Memoranda.
- **Rozvany, G.**, (1984), "Structural Layout Theory—The Present State of Knowledge," In New Directions in Optimum Structural Design, E. Atrek, R. Gallagher, K. Ragsdell, and O. Zienkiewicz, eds. John Wiley & Sons Ltd., s.c., pp. 167–195.
- **L. Navas-Sanchez, C. Olmedo, M. Vazquez** (2022) "A historical review of truss-like structures optimization theories since Maxwell until now" (no publicado).



Limitaciones de la teoría

Desde el trabajo de Michell muchos investigadores han extendido en algo su teoría. Inclusive existen desarrollos recientes:

- **R.E. Melchers** (2005) "On extending the range of Michell-like optimal topology structures" Struct Multidisc Optim 29, 85–92.
- **Rozvany, G., Sokół, T., and Pomezanski, V.**, (2014), "Fundamentals of exact multi-load topology optimization – stress-based least-volume trusses (generalized Michell structures) – Part I: Plastic design" Struct and Multidisc Optim, 50(6), pp. 1051–1078 .

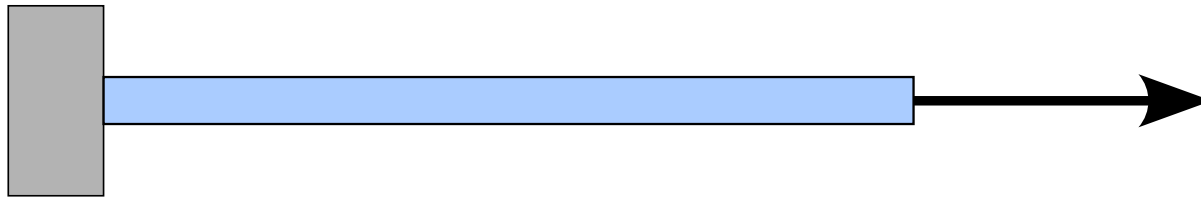
Sin embargo, los métodos analíticos no han ofrecido resultados suficientemente satisfactorios en la práctica, y no han logrado tener un impacto directo importante en los métodos de diseño en ingeniería. Según describe Rozvany en su paper:

*"classical Michell trusses **are not practical** because they usually have an infinite number of members, ignore buckling, consider one load condition only, and are, as a rule, unstable mechanisms"*



Limitaciones de la teoría

Normalmente se obtienen mecanismos inestables:



Además, la restricción de buscar una estructura “de barras” puede impedir encontrar estructuras verdaderamente óptimas:

- Sigmund, O, Aage, N, Andreassen E. (2016) “On the (non-)optimality of Michell structures” Struct Multidisc Optim (2016) 54:361–373.

En ese paper los autores mencionan con claridad: “the optimal structure is a **plate- or shell-like** structure of varying thickness”.

Limitaciones de la teoría

- Sigmund, O, Aage, N, Andreassen E. (2016) "On the (non-)optimality of Michell structures" Struct Multidisc Optim (2016) 54:361–373.

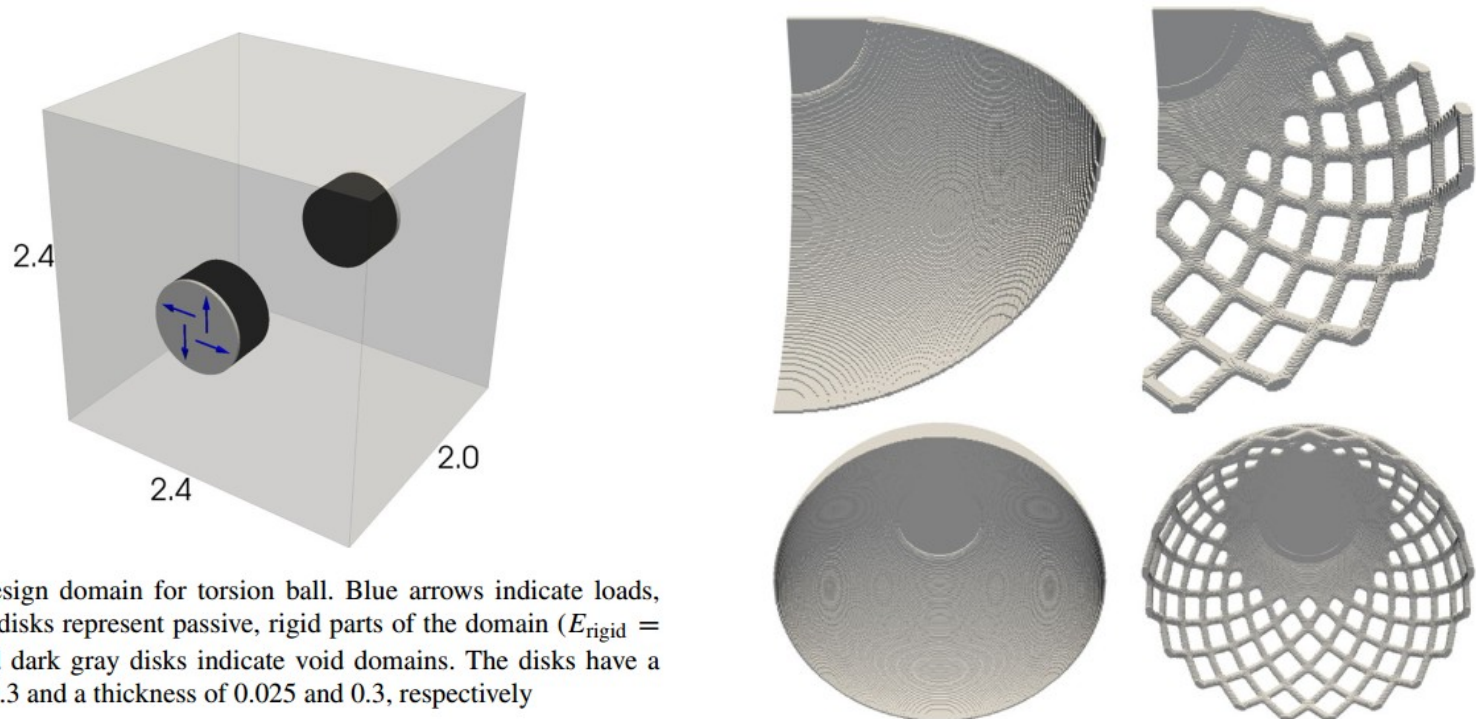


Fig. 4 Design domain for torsion ball. Blue arrows indicate loads, light gray disks represent passive, rigid parts of the domain ($E_{\text{rigid}} = 10^3 E$) and dark gray disks indicate void domains. The disks have a radius of 0.3 and a thickness of 0.025 and 0.3, respectively

Métodos computacionales

Los métodos computacionales generalmente son basados en el “**ground structure approach**” de Dorn, Gomory y Greenberg:

- **Dorn, W., Gomory, R., and Greenberg, H.**, (1964), “Automatic Design of Optimal Structures,” *Journal de Mecanique*, 3, pp. 25–52.

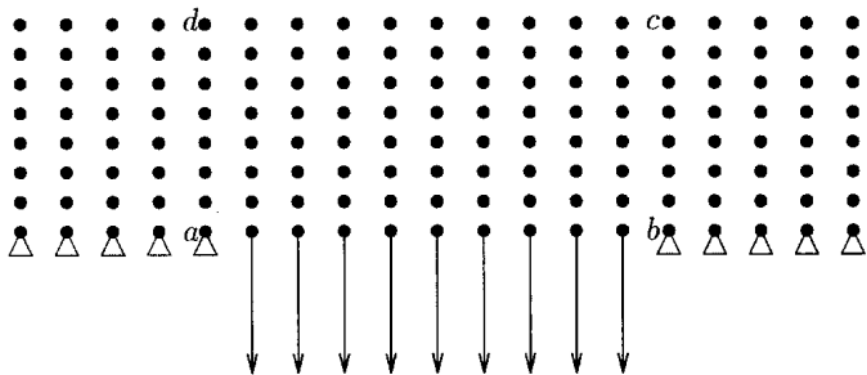
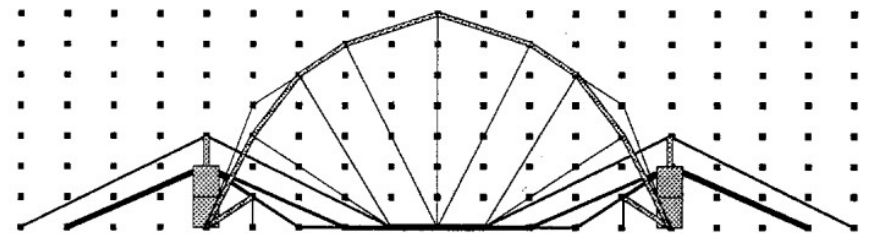


Fig. 4. Nodal points and boundary conditions for test example



- **Achtziger, W.** (1996) "Truss topology optimization including bar properties different for tension and compression" *Structural Optimization* 12, 63-74.



Ventajas del “ground structure approach”

- Naturalmente conduce a un problema con un **número finito de incógnitas**: los volúmenes de las barras que unen nodos.
- No hay incógnitas asociadas a la geometría (los nodos están fijos).
- Pueden considerarse funciones de desempeño estructural muy diversas:
 - **Complacencia**: trabajo de las fuerzas externas
 - Tensiones en las barras y desplazamientos de nodos
 - Frecuencias naturales
 - Carga crítica (inestabilidad elástica)
 - Cualquier otra condición mecánica expresable matemáticamente
- Pueden considerarse condiciones arquitectónicas o similares:
 - Regiones sin nodos
 - Barras con una áreas transversales limitadas inferior o superiormente
 - Barras con valores discretos para las áreas transversales



Desventajas del “ground structure approach”

- Problemas de optimización típicamente **enormes**
- Quitando un conjunto limitado de problemas (e.g. minimización de la complacencia) los problemas de optimización son no lineales y de muy difícil resolución.
- Si nos quedamos con los problemas de fácil resolución (e.g. minimización de la complacencia) normalmente se obtienen estructuras inestables que no pueden soportar pequeñas variaciones de las fuerzas externas.
- Soluciones cuestionables en cuanto a su practicidad (soluciones con un número grande de barras, muchas muy finas, muchas llegando a un nodo).
- Solamente se pueden obtener estructuras de barras, por lo que en general no serán estructuras óptimas (Sigmund: “the optimal structure is a **plate- or shell-like** structure of varying thickness”).



Minimización de la complacencia

- La complacencia (el trabajo de las fuerzas externas) es una medida global muy indicada para evaluar el desempeño estructural.
- El problema puede formularse tal como en el paper de **Achtziger, W.** (1996), "Truss topology optimization including bar properties different for tension and compression" Structural Optimization 12, 63-74

$$\begin{aligned} & \left(P_{\text{compl}}^{c=t} \right) \min_{a \in \mathbb{R}^m, u \in \mathbb{R}^n} \mathbf{f}^T \mathbf{u}, \\ & \text{s.t. } \sum_{i=1}^m a_i l_i \mathbf{K}_i \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{a} \geq \bar{\mathbf{a}}, \quad \sum_{i=1}^m w_i a_i \leq 1, \end{aligned}$$

- Ese problema admite una reformulación como problema de programación lineal, y por lo tanto se resuelve en forma muy eficiente.

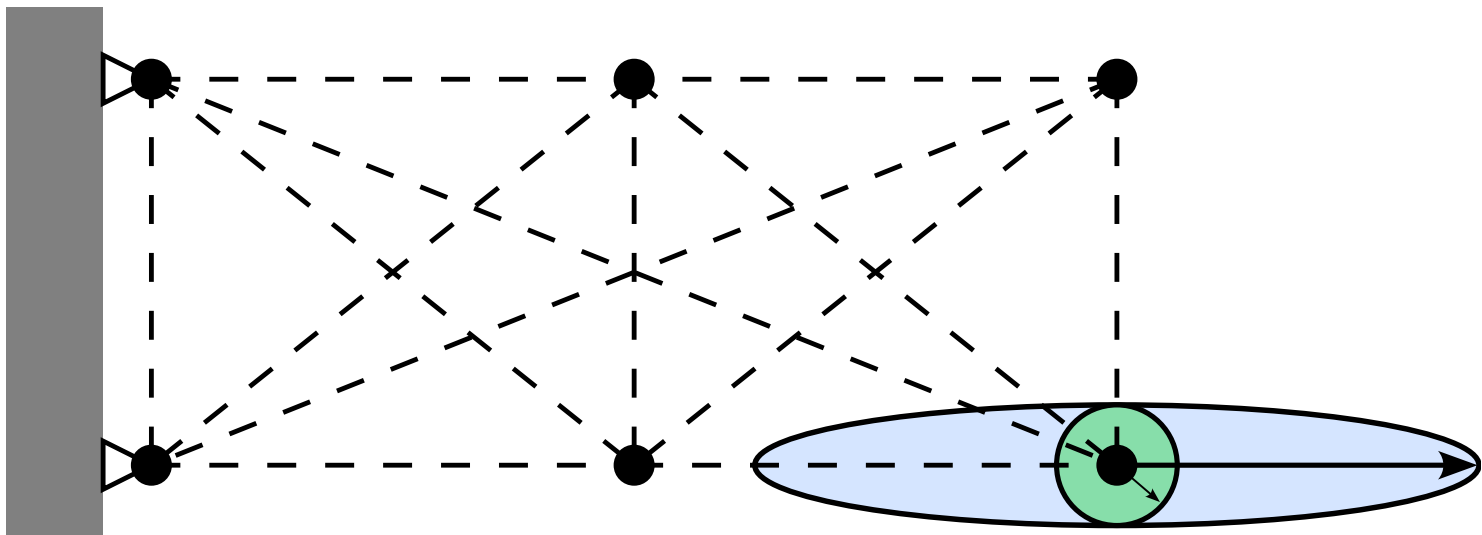


Formulaciones robustas

- La idea de las formulaciones robustas es modificar el modelo de optimización intentando lograr los siguientes dos objetivos:
 - Que el modelo de optimización continúe manteniendo una reformulación como un problema tratable (tipo programación lineal o similar).
 - Que la solución óptima de ese modelo sea **robusta**, es decir, que la complacencia no sea muy sensible a pequeñas variaciones de las cargas.
- Existen dos caminos típicos para esas formulaciones:
 - Ampliar el conjunto de fuerzas externas a considerar: además de las fuerzas principales considerar un conjunto de posibles perturbaciones pequeñas (pero determinísticas) de las mismas.
 - Considerar fuerzas cuya magnitud y/o dirección sean variables aleatorias.

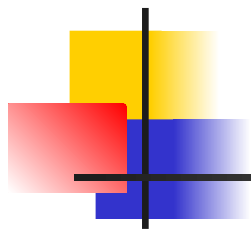
Método determinístico

- **Ben-Tal, A, Nemirovski, A.** (1997) "Robust truss topology design via semidefinite programming" SIAM J. OPTIM. Vol. 7, No. 4, pp. 991-1016

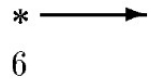


- Los autores muestran que la minimización de la complacencia en esta estructura es un problema de optimización que puede ser reformulado como un problema de **programación semidefinida**.

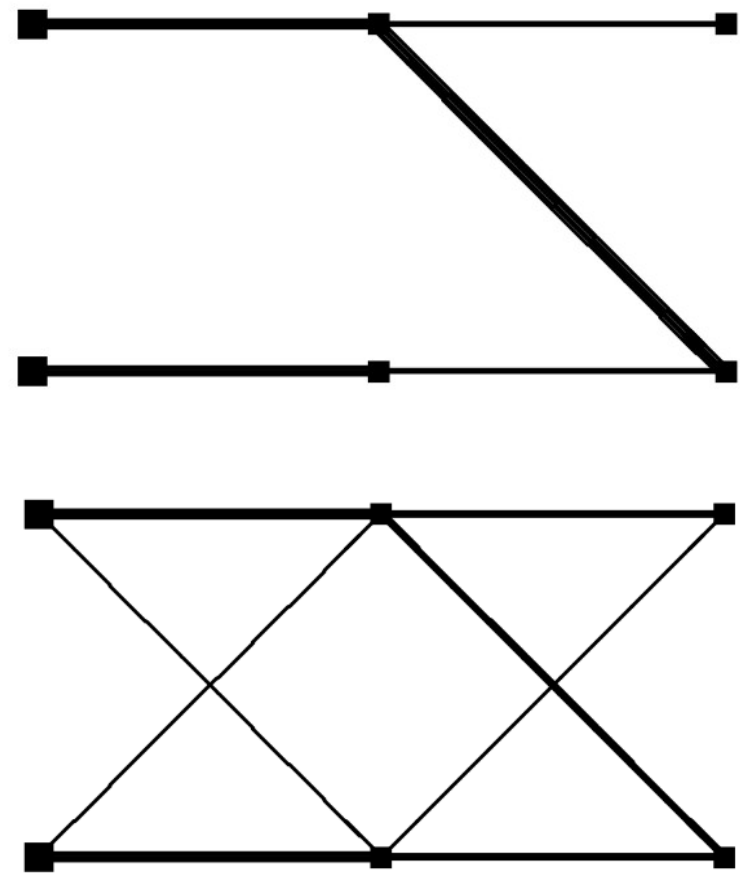
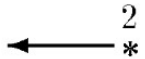
Método determinístico



4

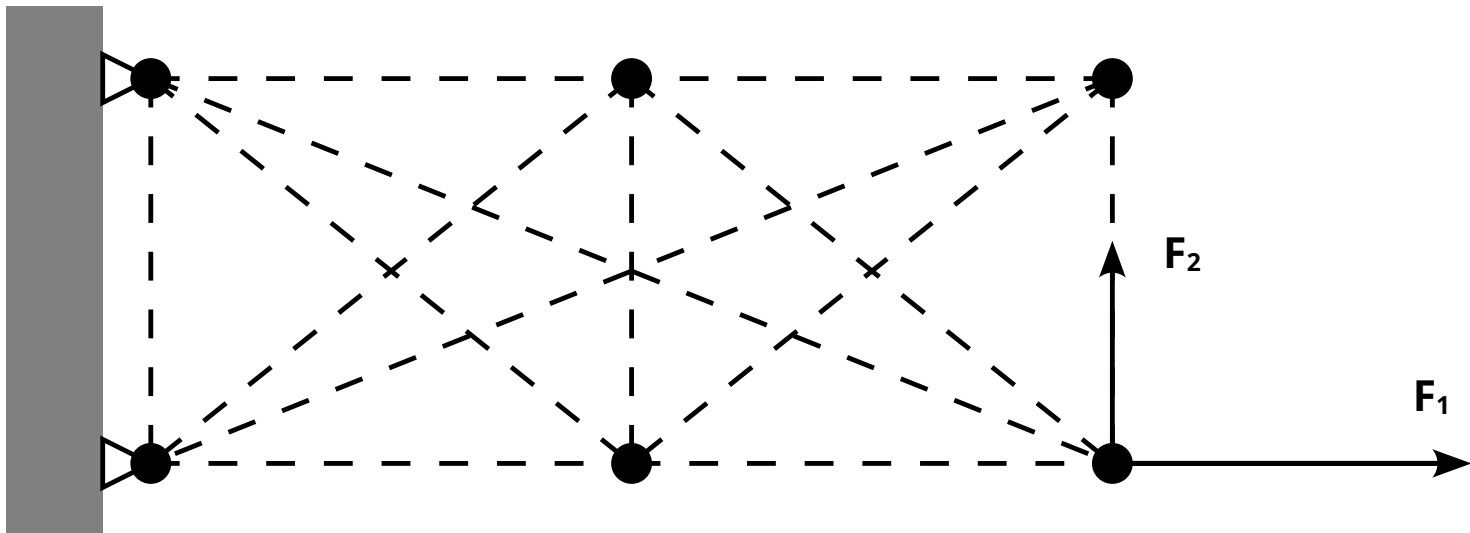


1
#



Método probabilístico

- **Alvarez F., Carrasco, M. (2005)** "Minimization of the expected compliance as an alternative approach to multiload truss optimization" Struct Multidisc Optim (2005) 29: 470-476



- Los autores muestran que la minimización del valor esperado de la complacencia en esta estructura es un problema de optimización que puede ser reformulado como un problema **típico determinístico multicarga**.

Método probabilístico

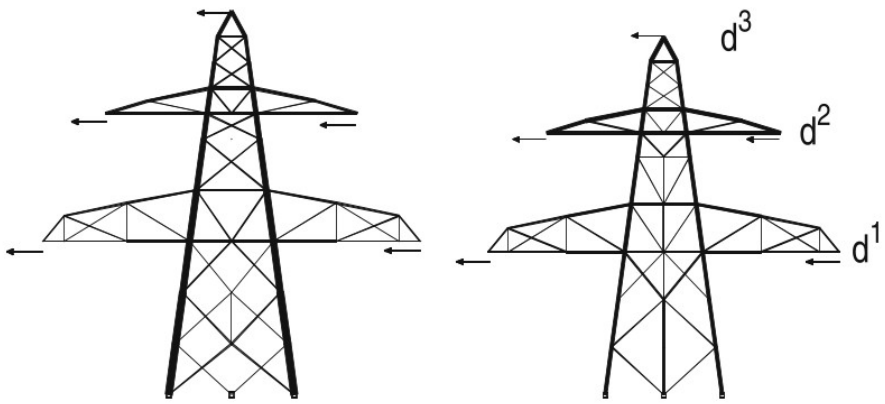
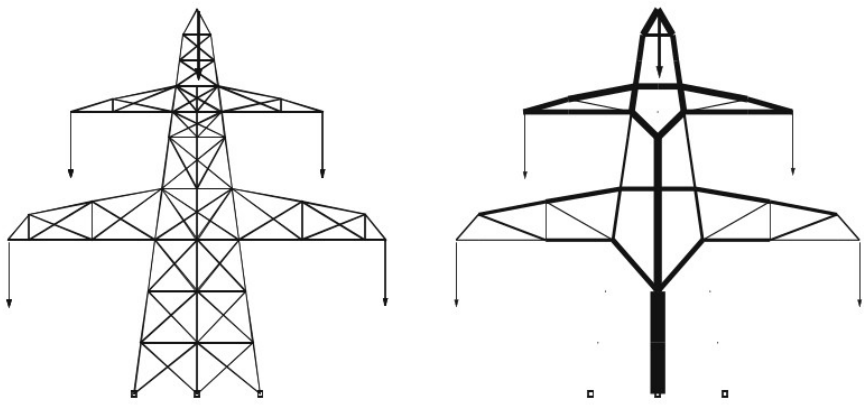


Fig. 5 Electricity mast: ground structure, single-load solution and two minimum expected compliance counterparts

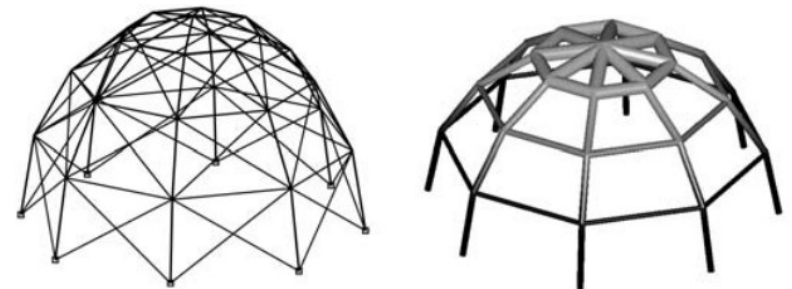


Fig. 3 Dome: ground structure and single-load optimal solution

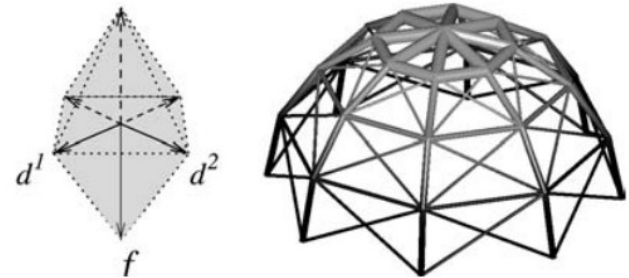


Fig. 4 Dome: two orthogonal perturbations at the top and optimal solution



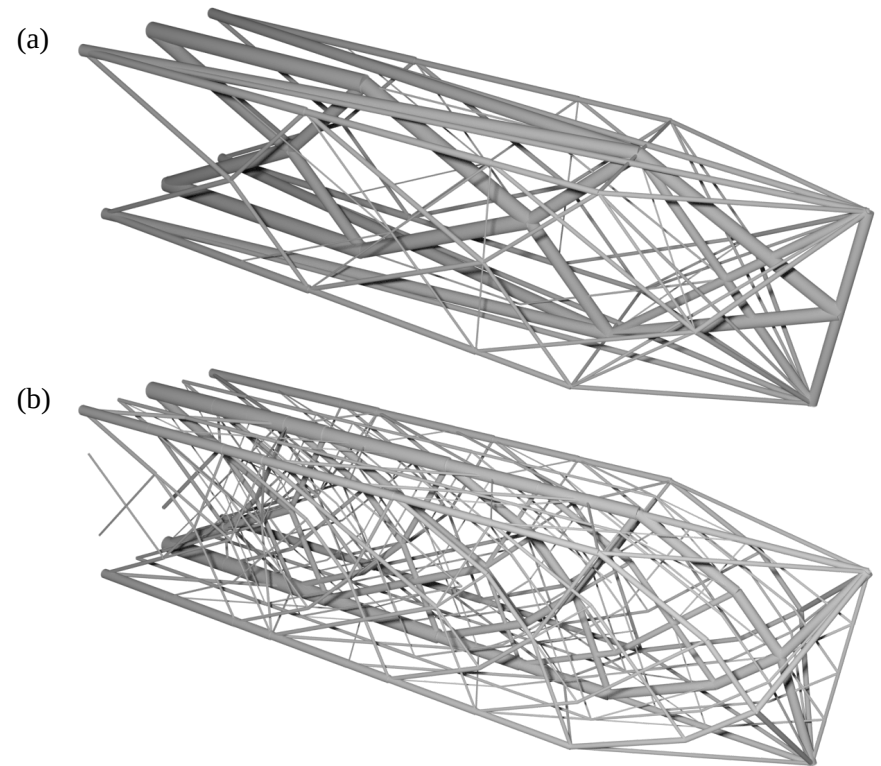
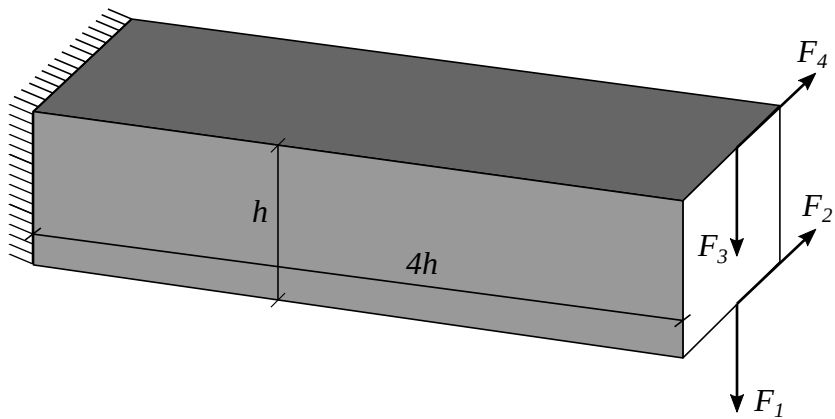
Método probabilístico basado en confiabilidad

- **Canelas A., Carrasco, M., López J.** (propuesto en 2023) “Topology optimization of robust trusses using the Bernstein approximation”

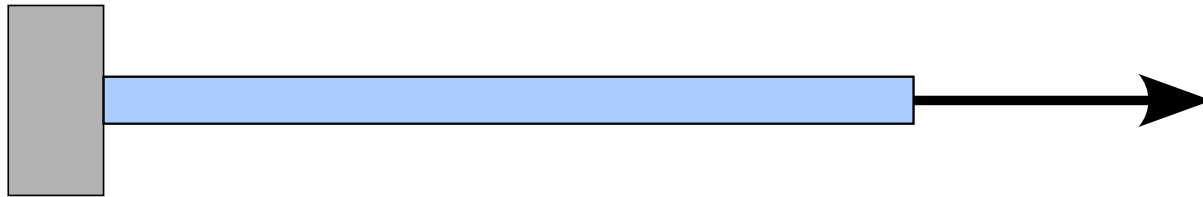
$$\left\{ \begin{array}{l} \min \bar{c} \\ \text{s.t. } x \in \mathbb{R}^m, \bar{c} \in \mathbb{R} \text{ and} \\ (a) \quad \mathbb{P}\{c(x, f, \xi) \geq \bar{c}\} \leq \alpha \quad \forall f \in E, \\ (b) \quad \sum_{i=1}^m x_i \leq V, \\ (c) \quad x \geq 0. \end{array} \right.$$

- Los autores muestran que el problema anterior puede ser reformulado (aproximadamente) como un **problema de optimización cónico**.

Método probabilístico basado en confiabilidad

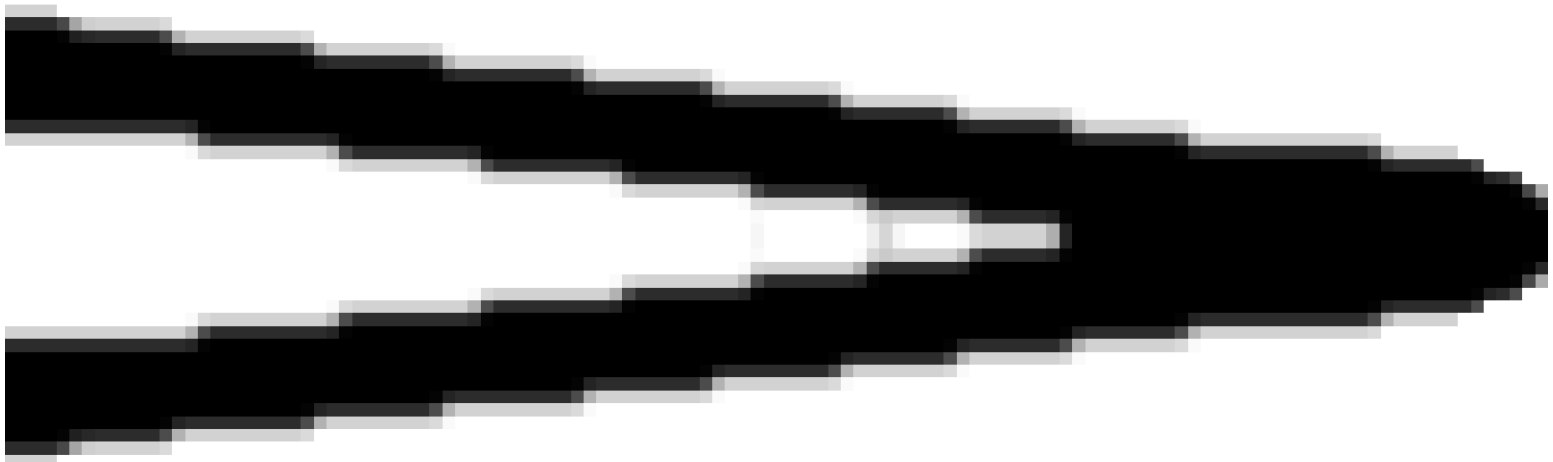


Método probabilístico basado en confiabilidad





Método probabilístico basado en confiabilidad



Método probabilístico basado en confiabilidad



Método probabilístico basado en confiabilidad





Detalles del método

- Consideramos las fuerzas fijas en un elipsoide $f = Pr \in E$, y la aproximación de Bernstein:

$$\mathbb{P}\{c(x, f, \xi) \geq \bar{c}\} \leq \alpha \quad \forall f \in E$$

$$\rightarrow \exp(-h\bar{c})\mathbb{E}[\exp(hc(x, r, \xi))] \leq \alpha \quad \forall r \in \mathbb{R}^p : Pr \in E$$

Además podemos calcular exactamente el valor esperado:

$$\mathbb{E}[\exp(hc(x, r, \xi))] = \frac{\exp(\frac{1}{2}r^\top ((I_p - 2hP^\top K(x)^{-1}P)^{-1} - I_p)r)}{\det(I_p - 2hP^\top K(x)^{-1}P)^{1/2}}$$

Detalles del método

Luego de un número **finito** de manipulaciones matemáticas obtenemos un modelo de **programación cónica**.

Sin embargo, todavía tenemos una restricción semidefinida grande.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \bar{c} \\ \text{s.t. } x \in \mathbb{R}^m, \bar{c}, t, \tau \in \mathbb{R}, d \in \mathbb{R}^p, \\ Y \in \mathbb{R}^{p \times p}, E \in \mathbb{S}_+^{2p}, \text{ and} \\ (a) \begin{pmatrix} K(x) & P & 0 \\ P^\top & E_{11} & E_{12} \\ 0 & E_{21} & E_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_+^{n+2p}, \\ (b) \begin{pmatrix} tI_p & tR \\ tR^\top & \tau I_p + tR^\top R \end{pmatrix} - E \in \mathbb{S}_+^{2p}, \\ (c) \begin{pmatrix} tI_p & Y \\ Y^\top & \text{diag}(Y) \end{pmatrix} - E \in \mathbb{S}_+^{2p}, \\ (d) Y \text{ is lower triangular,} \\ (e) (d_j, Y_{jj}, t) \in \mathcal{K}_{\text{exp}} \quad j = 1, \dots, p, \\ (f) \bar{c} - \tau + 2t \log(\alpha) + \sum_{j=1}^p d_j \in \mathbb{R}_+, \\ (g) V - \sum_{i=1}^m x_i \in \mathbb{R}_+, \\ (h) x \in \mathbb{R}_+^m. \end{array} \right.$$





Detalles del método

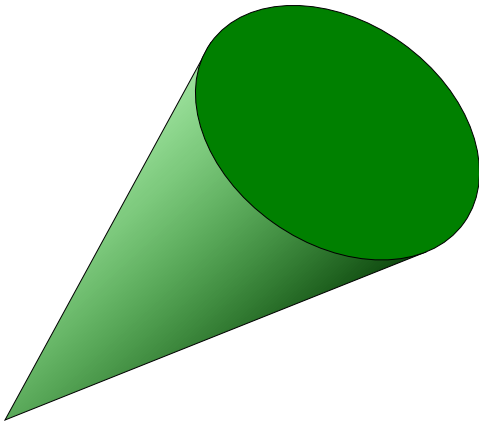
Luego de otro número **finito** de manipulaciones matemáticas obtenemos un modelo de programación cónica con restricciones semidefinidas pequeñas.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \min \bar{c} \\
 \text{s.t. } x \in \mathbb{R}^m, \bar{c}, t, \tau \in \mathbb{R}, d, g_i, h_i \in \mathbb{R}^p, \\
 Y \in \mathbb{R}^{p \times p}, F^i \in \mathbb{S}_+^{2p}, \text{ and} \\
 (a) \quad \begin{pmatrix} x_i & g_i^\top & h_i^\top \\ g_i & F_{11}^i & F_{12}^i \\ h_i & F_{21}^i & F_{22}^i \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_+^{1+2p} \quad i = 1, \dots, m, \\
 (b) \quad \sum_{i=1}^m b_i g_i^\top = P, \\
 (c) \quad \sum_{i=1}^m b_i h_i^\top = 0, \\
 (d) \quad \begin{pmatrix} tI_p & tR \\ tR^\top & \tau I_p + tR^\top R \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^m F^i \in \mathbb{S}_+^{2p}, \\
 (e) \quad \begin{pmatrix} tI_p & Y \\ Y^\top & \text{diag}(Y) \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^m F^i \in \mathbb{S}_+^{2p}, \\
 (f) \quad Y \text{ is lower triangular} \\
 (g) \quad (d_j, Y_{jj}, t) \in \mathcal{K}_{\text{exp}} \quad j = 1, \dots, p, \\
 (h) \quad \bar{c} - \tau + 2t \log(\alpha) + \sum_{j=1}^p d_j \in \mathbb{R}_+, \\
 (i) \quad V - \sum_{i=1}^m x_i \in \mathbb{R}_+.
 \end{array} \right.$$



Programación cónica

- Los algoritmos para programación cónica pueden ser considerados una extensión de los algoritmos pensados originalmente para programación lineal.



Tienen propiedades teóricas muy convenientes y son considerados muy eficientes en la práctica.

En este caso la variable, o una expresión afín de la variable debe estar en un **cono convexo cerrado**. Algunos ejemplos son:

- Reales positivos (programación lineal)
- Matrices semidefinidas positivas
- Conos de segundo orden
- Cono exponencial



Conclusiones

- Hemos propuesto una formulación para optimización de estructuras robustas basado en minimizar la complacencia bajo cierta restricción de probabilidad de falla.
- La formulación puede ser expresada como un problema de optimización cónico.
- Hemos obtenido resultados interesantes en el caso de estructuras de barras.
- Hemos obtenido algunos resultados preliminares para estructuras continuas que parecen prometedores.