Primer parcial (15 de mayo de 2023)

Ejercicio 1 (Axiomas de Zermelo-Fraenkel – 10 puntos)**.** Enunciar los axiomas (y esquemas de axiomas) de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel:

(EXTENSIONALIDAD), (PAR), (COMPRENSIÓN), (UNIÓN), (POTENCIA), (INFINITO) y (REMPLAZO).

Ejercicio 2 (Sucesión normal de ordinales – 15 puntos)**.** Se dice que una sucesión transfinita de ordinales $(\gamma_\alpha)_{\alpha:On}$ es *normal* cuando:

(i) La sucesión $(\gamma_\alpha)_{\alpha:On}$ es estrictamente creciente: si $\alpha < \beta$, entonces $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$.
(ii) Para todo ordinal límite α, se tiene que $\gamma_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta$.

(Por ejemplo, la sucesión transfinita $(\aleph_\alpha)_{\alpha:On}$ de los cardinales infinitos es normal.) Fijada una sucesión normal de ordinales $(\gamma_\alpha)_{\alpha:On}$, demostrar los siguientes enunciados:

(1) Para todo conjunto X de ordinales, $X \neq \varnothing$, tenemos que $\sup_{\alpha\in X} \gamma_\alpha = \gamma_{\sup(X)}$.
(2) Para todo ordinal α, tenemos que $\alpha \leq \gamma_\alpha$.
(3) Para todo ordinal α, existe un ordinal $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta = \gamma_\beta$ («punto fijo»).
(*Sugerencia:* considerar la sucesión $(\beta_n)_{n\in\omega}$ definida por $\beta_n = \alpha$ y $\beta_{n+1} = \gamma_{\beta_n}$.)

Ejercicio 3 (Axioma de elección – 5 puntos)**.** — Para cada una de las siguientes aserciones, decir si su demostración necesita o no el axioma de elección (sin justificar la respuesta):

(1) Dados dos conjuntos A y B no vacíos:
  (a) Toda inyección $f : A \hookrightarrow B$ tiene una inversa por la izquierda.
  (b) Toda sobreyección $g : B \twoheadrightarrow A$ tiene una inversa por la derecha.
(2) Si dos conjuntos A y B son bien ordenables, entonces:
  (a) $A + B$ es bien ordenable.
  (b) $A \times B$ es bien ordenable.
  (c) B^A es bien ordenable.
(3) Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos no vacíos:
  (a) Si I es finito, entonces $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.
  (b) Si I es numerable, entonces $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.
  (c) Si I es bien ordenable, entonces $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.
  (d) Si A_i es bien ordenable para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.
  (e) Si A_i es un conjunto de ordinales para todo $i \in I$, entonces $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$.

Se podrán dar las respuestas («Sí/No») en la siguiente tabla:

(1.a)	(1.b)	(2.a)	(2.b)	(2.c)	(3.a)	(3.b)	(3.c)	(3.d)	(3.e)

(Respuesta **correcta**: 0, 5 punto; **incorrecta**: −0, 5 punto; **sin responder**: 0 punto.)

Ejercicio 4 (Cardinales infinitos – 5 puntos)**.** Para cada uno de los siguientes conjuntos, decir si su cardinal es $\aleph_0$, $2^{\aleph_0}$ o $2^{2^{\aleph_0}}$ (sin justificar la respuesta):

$$\mathbb{Q}, \quad \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{Q}[X], \quad \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}, \quad \mathbb{A}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \mathbb{R}[X], \quad \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \quad C^0(\mathbb{R})$$

Se recuerda que $\mathbb{A}$ es el conjunto de los números algebraicos, $K[X]$ el anillo de los polinomios con coeficientes en K, y $C^0(\mathbb{R})$ el conjunto de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ hasta $\mathbb{R}$.
Se podrán dar las respuestas («$\aleph_0/2^{\aleph_0}/2^{2^{\aleph_0}}$») en la siguiente tabla:

$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{Q}[X]$	$\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$	$\mathbb{A}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{R}[X]$	$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$C^0(\mathbb{R})$

(Respuesta **correcta**: $0,5$ punto; **incorrecta**: $-0,25$ punto; **sin responder**: 0 punto.)

Ejercicio 5 (Cardinales regulares y singulares – 15 puntos)**.** En este ejercicio se trabaja en ZFC (= ZF + AC). Se dice que un cardinal infinito κ es *singular* cuando se puede escribir

$$\kappa = \sup_{i \in I} \mu_i$$

para cierta familia $(\mu_i)_{i \in I}$ de cardinales $< \kappa$ indexada por un conjunto I de cardinal $< \kappa$. Un cardinal infinito κ es *regular* cuando no es singular.

(1) Demostrar que:
  - (i) $\aleph_0$ es regular;
  - (ii) $\aleph_\omega$ es singular;
  - (iii) $\aleph_{\alpha+1}$ es regular para todo ordinal α;
  - (iv) $\aleph_{\alpha+\omega}$ es singular para todo ordinal α.

(2) Demostrar que un cardinal infinito κ es regular si y sólo si todo subconjunto $X \subseteq \kappa$ no acotado de κ (con el buen orden subyacente) tiene cardinal κ.

(3) Asumiendo la hipótesis del continuo (HC), que se puede decir sobre el cardinal de $\mathbb{R}$?