Segundo parcial (3 de julio de 2023)

Ejercicio 1 (Deducción natural – 10 puntos)**.** Derivar en el sistema NK:

(1) $(\phi \Rightarrow \psi) \vee (\phi \Rightarrow \chi) \ \Rightarrow\ (\phi \Rightarrow \psi \vee \chi)$
(2) $\exists x\,(\phi(x) \wedge \psi(x)) \ \Rightarrow\ \exists x\,\phi(x) \wedge \exists x\,\psi(x)$

Ejercicio 2 (Cálculo de secuentes – 10 puntos)**.** Derivar en el sistema LK:

(1) $(\phi \Rightarrow \psi) \ \Leftrightarrow\ (\neg\phi \vee \psi)$
(2) $\exists x\,\neg\phi(x) \ \Leftrightarrow\ \neg\forall x\,\phi(x)$

Ejercicio 3 (Aritmética de Peano – 10 puntos)**.** Derivar en PA la fórmula $\forall x\,\forall y\,(x+y = y+x)$. No se pide una derivación explícita, sino un razonamiento suficientemente detallado (escrito en estilo semi formal) a partir del cual se podría reconstruir una derivación, y que indica en particular todos los axiomas usados. Sugerencia: enunciar y demostrar lemas intermedios.

Ejercicio 4 (Completitud y equivalencia elemental – 6 puntos)**.** Sea $\mathscr{T}$ una teoría consistente sobre un lenguaje $\mathscr{L}$. Se recuerda que:

- $\mathscr{T}$ es *completa* cuando $\mathscr{T} \vdash \phi$ o $\mathscr{T} \vdash \neg\phi$ para toda fórmula cerrada ϕ de $\mathscr{L}$;
- dos modelos $\mathscr{M}_1$ y $\mathscr{M}_2$ de $\mathscr{T}$ son *elementalmente equivalentes* cuando $\mathscr{M}_1 \models \phi$ si y sólo si $\mathscr{M}_2 \models \phi$ para toda fórmula cerrada ϕ de $\mathscr{L}$.

Demostrar que la teoría $\mathscr{T}$ es completa si y sólo si todos sus modelos son elementalmente equivalentes entre sí.

Ejercicio 5 (Espectro de una teoría – 14 puntos)**.** Dada una teoría de primer orden $\mathscr{T}$ sobre un lenguaje $\mathscr{L}$, se llama *espectro de* $\mathscr{T}$ y se escribe $Sp(\mathscr{T})$ al conjunto de todos los cardinales de los modelos finitos de $\mathscr{T}$.

(1) Dar ejemplos de teorías con los espectros: $\varnothing$, $\mathbb{N}^*$, $\{42\}$, $\{3, 7, 2023\}$ y $2\mathbb{N}^*$.
(2) Para cada entero $n \geq 1$, dar fórmulas $\chi_{\leq n}$, $\chi_{\geq n}$ y $\chi_{=n}$ tales que en toda $\mathscr{L}$-estructura $\mathscr{M}$, tenemos que:
   - $\mathscr{M} \models \chi_{\leq n}$ sii $\mathrm{Card}(\mathscr{M}) \leq n$;
   - $\mathscr{M} \models \chi_{\geq n}$ sii $\mathrm{Card}(\mathscr{M}) \geq n$;
   - $\mathscr{M} \models \chi_{=n}$ sii $\mathrm{Card}(\mathscr{M}) = n$;
(3) Usando el teorema de compacidad, demostrar que toda teoría de primer orden cuyo espectro es infinito admite un modelo infinito.