Práctico 1

Ejercicio 1. Probar las siguientes afirmaciones:

(1) $\{a\} = \{b\}$ si y sólo si $a = b$,
(2) $\{a, b\} = \{c, d\}$ si y sólo si $((a = c) \wedge (b = d)) \vee ((a = d) \wedge (b = c))$,
(3) $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $(a = c) \wedge (b = d)$

(Se recuerda que $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$.)

Ejercicio 2.

(1) Probar que el predicado $\phi(x) \equiv x \notin x$ no es colectivizante (paradoja de Russell).
(2) Probar que la clase de todos los conjuntos no es un conjunto, es decir: $\neg\exists x\, (\forall z\, (z \in x))$.
(3) Probar que la clase de los conjuntos unitarios (conjuntos con un solo elemento) no es un conjunto.
(4) Deducir que la clase de todos los conjuntos finitos no es un conjunto. (Aunque no se haya definido aún la noción de conjunto finito, se puede asumir que todo conjunto unitario es finito.)

Imágenes y preimágenes Dada una función $f : X \to Y$ y dos subconjuntos $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$, se recuerda que:

- La *imagen* de $A \subseteq X$ por f está definida por $f(A) := \{y \in Y : (\exists x \in A) f(x) = y\}$ $(\subseteq Y)$
- La *preimagen* de $B \subseteq Y$ por f está definida por $f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ $(\subseteq X)$

Ejercicio 3. Sea una función $f : X \to Y$, con subconjuntos $A, A_1, A_2 \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$.

(1) Para cada una de las siguientes igualdades, decir si es verdadera (demostrándola) o falsa (dando un contra-ejemplo, e indicando si una de la dos inclusiones se cumple):

a) $f(\varnothing) = \varnothing$ *b*) $f(X) = Y$ *c*) $f(A^c) = (f(A))^c$
d) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$ *e*) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$

(2) Mismo ejercicio con las siguientes igualdades:

a) $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ *b*) $f^{-1}(Y) = X$ *c*) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$
d) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$ *e*) $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

(3) ¿Qué cambia en 1. y 2. si se remplaza las uniones e intersecciones binarias ($A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2$, etc.) por uniones e intersecciones infinitarias ($\bigcup_{i \in I} A_i$, $\bigcap_{i \in I} A_i$, etc.)?

Inyecciones y sobreyecciones Intuitivamente, la existencia de una inyección $f : A \hookrightarrow B$ significa que «A es más pequeño que B», y la existencia de una sobreyección $f : A \twoheadrightarrow B$ que «A es más grande que B». Pero las cosas no son tan sencillas...

Ejercicio 4 (Un problema de elección)**.** Sean A, B dos conjuntos cualesquiera.

(1) Supongamos que $A \neq \varnothing$ y que existe una inyección $f : A \hookrightarrow B$. Mostrar que existe una sobreyección $g : B \twoheadrightarrow A$, y que se puede construir g tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
(2) ¿Qué pasa cuando $A = \varnothing$?
(3) Supongamos que existe una sobreyección $f : A \twoheadrightarrow B$. ¿Existe una inyección $g : B \hookrightarrow A$?

Ejercicio 5 (Cantor)**.** Sea A un conjunto.

(1) Demostrar que no existe ninguna sobreyección $f : A \to \mathfrak{P}(A)$.
(*Sugerencia*: considerar el conjunto $\{x \in A : x \notin f(x)\}$.)
(2) Deducir de (1) que no existe ninguna inyección $g : \mathfrak{P}(A) \to A$.
(3) Deducir de lo anterior que para todo conjunto a, tenemos que $\mathfrak{P}(\bigcup a) \notin a$.

Conjuntos equipotentes Se recuerda que dos conjuntos X e Y son *equipotentes* cuando existe una biyección $f : X \xrightarrow{\sim} Y$. Un conjunto X es *numerable* cuando es equipotente con $\mathbb{N}$.

Ejercicio 6. Probar que los siguientes pares de conjuntos son equipotentes:

(1) $\mathfrak{P}(A)$ y 2^A
(2) $A \times \sum_{i \in I} B_i$ y $\sum_{i \in I}(A \times B_i)$
(3) $A^{\sum_{i \in I} B_i}$ y $\prod_{i \in I}(A^{B_i})$
(4) $(A^B)^C$ y $A^{B \times C}$
(5) $\sum_{i \in I} A_i$ y $\bigcup_{i \in I} A_i$, si los conjuntos A_i $(i \in I)$ son disjuntos dos a dos.

Ejercicio 7 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder)**.** Sea X un conjunto dado con una inyección $h : X \hookrightarrow X$ (que define así una biyección entre X y $h(X)$), e Y un conjunto tal que $h(X) \subseteq Y \subseteq X$. Se trata de demostrar que Y es equipotente a X.

(1) Demostrar que existe un subconjunto *minimal* $Z \subseteq X$ tal que $(X - Y) \subseteq Z$ y $h(Z) \subseteq Z$.
(2) Demostrar que $h(Z) = Z \cap Y$.
(3) Usando la inyección $h : X \hookrightarrow X$ y el subconjunto $Z \subseteq X$ definido en (1), construir una biyección $h' : X \xrightarrow{\sim} Y$. (*Sugerencia:* definir $h'(x)$ por casos según que $x \in Z$ o no.)
(4) Deducir de lo anterior el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder:
Si A y B son dos conjuntos tales que existen inyecciones $f : A \hookrightarrow B$ y $g : B \hookrightarrow A$, entonces A y B son equipotentes.

El teorema de Cantor-Bernstein-Schröder es una herramienta fundamental para demostrar que dos conjuntos A y B son equipotentes, en la medida en que reduce el problema (difícil) de la construcción de una biyección entre A y B al problema (más sencillo) de la construcción de dos inyecciones $f : A \hookrightarrow B$ y $g : B \hookrightarrow A$ sin relación entre ellas.

Ejercicio 8 (Conjuntos numerables)**.** Demostrar las siguientes propiedades, usando el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder cuando se necesite.

(1) Si dos conjuntos A y B son numerables, entonces $A \times B$ también lo es.
(2) Los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son numerables.
(3) Si $(A_i)_{i \in I}$ es una familia de conjuntos numerables indexada por un conjunto numerable I, entonces $\sum_{i \in I} A_i$ y $\bigcup_{i \in I} A_i$ también son numerables.
(4) Si A es un conjunto numerable, entonces el conjunto $\mathfrak{P}_{\text{fin}}(A)$ formado por todos los subconjuntos finitos de A también es numerable.
(5) Si A es un anillo conmutativo numerable (por ejemplo $\mathbb{Z}$), entonces el anillo $A[X]$ de los polinomios con coeficientes en A también es numerable.
(6) Deducir de lo anterior que el conjunto de los números algebraicos
$\mathbb{A} = \{x \in \mathbb{R} \ : \ (\exists p \in \mathbb{Z}[X])\, p(x) = 0\}$ es numerable.

Ejercicio 9 («Lo veo pero no lo creo»)**.** Usando el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, demostrar que:

(1) Los conjuntos $\mathbb{R}^2$ (el «plano») y $\mathbb{R}$ (la «recta») son equipotentes.
(Sugerencia: remplazar $\mathbb{R}$ por el intervalo abierto $(0, 1)$.)

(2) Los conjuntos $\mathfrak{P}(\mathbb{N})$ y $\mathbb{R}$ son equipotentes.

(*Observación histórica: la existencia de una biyección entre el plano y la recta fue descubierta en 1877 por Cantor, que escribió en una carta a Dedekind: «lo veo pero no lo creo».*)

Conjuntos Dedekind-infinitos Un conjunto X es *Dedekind-infinito* (o *D-infinito*) cuando existe una función $f : X \to X$ inyectiva pero no sobreyectiva.

Ejercicio 10 (Conjuntos D-infinitos)**.**

(1) Verificar que los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ son D-infinitos.

(2) Mostrar que si $X \subseteq Y$ y X es D-infinito, entonces Y también es D-infinito.

(3) Usando las propiedades básicas de los conjuntos finitos (y anticipándose la definición formal de tales conjuntos), mostrar que un conjunto finito nunca es D-infinito.

(4) Sea X un conjunto D-infinito dado con una inyección $f : X \hookrightarrow X$ y un elemento $a \in X$ tal que $a \notin \mathrm{img}(f)$. Mostrar que existe un subconjunto *minimal* $N \subseteq X$ tal que $a \in N$ y $f(N) \subseteq N$. Deducir que el conjunto N satisface el principio de inducción:

Si $P \subseteq N$ es tal que $a \in P$ y $f(P) \subseteq P$, entonces $P = N$.

(Intuitivamente, N es una copia de $\mathbb{N}$ adentro de X, donde a y f tienen el papel de 0 y de la función sucesor. En particular, el conjunto N equipado con a y f es isomorfo a $\mathbb{N}$.)