Práctico 2: buenos órdenes

Un *buen orden* sobre un conjunto A es una relación de orden $\leq$ (amplio) sobre A tal que todo subconjunto no vacío de A admita un mínimo:

$$\begin{aligned} \leq \text{ buen orden sobre } A \quad \equiv \quad & \leq \text{ orden sobre } A \quad \wedge \\ & (\forall X \subseteq A)\,(X \neq \varnothing \Rightarrow (\exists x \in X)\,(\forall y \in X)\, x \leq y)\,. \end{aligned}$$

Un *conjunto bien ordenado* es un conjunto ordenado $(A, \leq)$ cuyo orden $\leq$ es un buen orden sobre A. Dado un conjunto bien ordenado $\mathcal{A} = (A, \leq)$:

- Se escribe $0_{\mathcal{A}} = \text{mín}(A)$ (si $A \neq \varnothing$).
- Para todo $x \in A$, se define el *sucesor* de x (si existe) por: $s_{\mathcal{A}}(x) = \text{mín}\{y \in A : x < y\}$. (El sucesor de x existe si y sólo si x no es el máximo de A.)
- Se dice que un elemento $x \in A$ es *límite* cuando x no es ni $0_{\mathcal{A}}$ ni un sucesor.

Ejercicio 1. — Sea $\mathcal{A} = (A, \leq)$ un conjunto bien ordenado.

(1) Demostrar que para todos $x, y \in A$, si $s_{\mathcal{A}}(x) = s_{\mathcal{A}}(y)$, entonces $x = y$.

(2) Demostrar que para todo $x \in A$, x es un elemento límite si y sólo si: $(\exists y \in A)\,(y < x) \;\wedge\; (\forall y \in A)\,(y < x \Rightarrow (\exists z \in A)\,(y < z \wedge z < x))$.

Ejercicio 2 (Segmentos iniciales)**.** — Sea $\mathcal{A} = (A, \leq)$ un conjunto bien ordenado. Se llama *segmento inicial* de $\mathcal{A}$ a todo subconjunto $S \subseteq A$ tal que $(\forall x, y \in A)\,(x \leq y \wedge y \in S \Rightarrow x \in S)$.

(1) Demostrar que para todo elemento $x \in A$, el conjunto $Seg_{\mathcal{A}}(x) := \{y \in A : y < x\}$ es un segmento inicial de $\mathcal{A}$. ¿Cuál es $Seg_{\mathcal{A}}(0_{\mathcal{A}})$? ¿$Seg_{\mathcal{A}}(s_{\mathcal{A}}(x))$?

(2) Demostrar que para todo segmento inicial S de $\mathcal{A}$, o bien $S = A$, o bien $S = Seg_{\mathcal{A}}(x)$ para algún $x \in A$, y que además, ambos casos son dijuntos.

Ahora, se define el conjunto ordenado $\mathbf{S}(\mathcal{A}) = (Seg(\mathcal{A}), \leq_{Seg(\mathcal{A})})$ por:

$$\begin{aligned} Seg(\mathcal{A}) \quad &= \quad \{S \in \mathfrak{P}(A) : S \text{ segmento inicial de } \mathcal{A}\} \\ S \leq_{Seg(\mathcal{A})} S' \quad &\equiv \quad S \subseteq S' \qquad (\text{para todos } S, S' \in Seg(\mathcal{A})) \end{aligned}$$

(3) Demostrar que $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ es un conjunto bien ordenado no vacío.

Ejercicio 3 (Suma de una familia de conjuntos bien ordenados)**.** — Sea $(\mathcal{A}_i)_{i \in I} = (A_i, \leq_{A_i})_{i \in I}$ una familia de conjuntos bien ordenados, indizada por un conjunto bien ordenado $\mathcal{I} = (I, \leq_I)$. Se considera la suma directa (generalizada)

$$S \;=\; \sum_{i \in I} A_i \;=\; \{(i, x) \;:\; i \in I \;\wedge\; x \in A_i\}$$

con la relación $(\leq_S) \subseteq (S \times S)$ definida por: $(i, x) \leq_S (j, y) \;\equiv\; i <_I j \vee (i = j \wedge x \leq_{A_i} y)$.

(1) Demostrar que $\leq_S$ es un buen orden sobre la suma directa (generalizada) $S = \sum_{i \in I} A_i$.

(2) En S: caracterizar 0, el sucesor de un elemento (cuando existe) y los elementos límites.

Observación: Cuando $\mathcal{A}_i = (A, \leq_A)$ para todo $i \in I$ (la familia $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ es constante), tenemos que $S = I \times A$. En este caso, el buen orden $\leq_S$ se llama el *buen orden producto* de $\mathcal{I}$ por $\mathcal{A}$.

Inducción transfinita

Ejercicio 4 (Principio de inducción transfinita)**.** — Sea $\mathcal{A} = (A, \leq)$ un conjunto bien ordenado, y $\phi(x)$ un predicado definido sobre A.

(1) Demostrar el siguiente principio de inducción:

$$(\forall x \in A)[(\forall y \in A)\,(y < x \Rightarrow \phi(y)) \;\Rightarrow\; \phi(x)] \quad\Rightarrow\quad (\forall x \in A)\,\phi(x)$$

¿Donde está escondido el «caso de base» $\phi(0_{\mathcal{A}})$?

Ejercicio 5 (Definición de función por inducción transfinita)**.** — Sea $\mathcal{A} = (A, \leq)$ un conjunto bien ordenado, y X un conjunto dado con una función $H : X^{<A} \to X$, donde $X^{<A} = \bigcup_{x\in A} X^{Seg(x)}$ es el conjunto de todas las funciones definidas sobre un segmento inicial estricto de A, y con valores en X. El objetivo del ejercicio es demostrar que la función $H : X^{<A} \to X$ permite definir "por inducción" una única función $f : A \to X$ que satisface la relación inductiva:

$$(*) \qquad f(x) \;=\; H(f_{\restriction Seg(x)}) \qquad \text{(para todo } x \in A)$$

donde $f_{\restriction Seg(x)}$ es la función f restringida al segmento inicial $Seg(x) \subsetneq A$. (Intuitivamente, cada valor de f se calcula aplicando la función H a todos los valores anteriores de f.)

(1) Demostrar que para todo $x \in A$, existe una única función $f_x : Seg(x) \to X$ tal que

$$(**) \qquad f_x(y) \;=\; H((f_x)_{\restriction Seg(y)}) \qquad \text{(para todo } y < x)$$

(*Sugerencia*: utilizar el principio de inducción del ejercicio 4.)

(2) Deducir de (1) que existe una familia de funciones $(f_x : Seg(x) \to X)_{x\in A}$ que cumplen $(**)$ para todo $x \in A$. ¿Se necesita utilizar el esquema de remplazo? ¿el axioma de elección?

(3) Demostrar que la función $f : A \to X$ definida por $\quad (\forall x \in X)\, f(x) = H(f_x) \quad$ cumple $(*)$.

(4) Demostrar que si $f, f' : A \to X$ cumplen $(*)$, entonces $f = f'$.

Morfismos de conjuntos bien ordenados

Ejercicio 6 (Encajes de conjuntos ordenados)**.** — Sean $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ y $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ dos conjuntos ordenados, y $f : A \to B$ una función. Se consideran la siguientes condiciones:

(i) $(\forall x, y \in A)\,(x \leq_A y \Leftrightarrow f(x) \leq_B f(y))$ (f es un *encaje de conjuntos ordenados*)

(ii) $(\forall x, y \in A)\,(x <_A y \Rightarrow f(x) <_B f(y))$ (f es *estrictamente creciente*)

(1) Demostrar que si f cumple (i), entonces f es inyectiva y cumple (ii) también.

(2) Dar un contraejemplo donde f cumple la condición (ii) sin ser inyectiva.

(3) Demostrar que las condiciones (i) y (ii) son equivalentes cuando el orden $\leq_A$ es total.

Definiciones: Sean $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ y $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ dos conjuntos bien ordenados. Se llama *morfismo* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ a toda función $f : A \to B$ que cumple la condición (i) del ejercicio 6 (equivalente a (ii)). Se llama *isomorfismo* a todo morfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ biyectivo.

Ejercicio 7. — Sean $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ y $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ dos conjuntos bien ordenados.

(1) Demostrar que si $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ es un morfismo, entonces $(\forall x \in A)\,(x \leq f(x))$.

(2) Deducir de (1) que si dos segmentos iniciales S y S' de $\mathcal{A}$ son isomorfos (con los buenos órdenes inducidos por $\mathcal{A}$), entonces $S = S'$.

(3) Demostrar que si $f, g : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ son isomorfismos, entonces $f = g$.
(*Sugerencia*: utilizar el principio de inducción del ejercicio 4.)

Ejercicio 8. — Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \leq_A)$ un conjunto bien ordenado, y $B \subseteq A$ un subconjunto cualquiera. Se escribe $\mathcal{B} = (B, (\leq_A)_{\restriction B})$ el subconjunto $B \subseteq A$ equipado con el buen orden inducido.

(1) Demostrar que existe un único morfismo $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $\mathrm{img}(f)$ es un segmento inicial de $\mathcal{A}$. (*Sugerencia:* definir la función f por inducción transfinita, ejercicio 5.)

(2) Deducir que todo subconjunto $B \subseteq A$ es isomorfo a un único segmento inicial de $\mathcal{A}$.

Definiciones: Sean $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ y $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ dos conjuntos bien ordenados. Se consideran las siguientes relaciones binarias sobre la clase de los conjuntos bien ordenados:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B} \quad &\equiv \quad A \text{ segmento inicial de } \mathcal{B} \ \wedge \ (\leq_A) = (\leq_B)_{\restriction A} \\
\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \quad &\equiv \quad \exists f\, (f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \text{ morfismo}) \\
\mathcal{A} \simeq \mathcal{B} \quad &\equiv \quad \exists f\, (f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} \text{ isomorfismo})
\end{aligned}$$

Ejercicio 9 (Propiedades de $\sqsubseteq$, $\leq$ y $\simeq$)**.**

(1) Demostrar que $\sqsubseteq$ es un orden sobre la clase de los conjuntos bien ordenados.

(2) Demostrar que $\leq$ es un preorden sobre la clase de los conjuntos bien ordenados, que contiene el orden $\sqsubseteq$ (es decir: $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$).

(3) Demostrar que $\simeq$ es una relación de equivalencia sobre la clase de los conjuntos bien ordenados, y que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$.

(4) Demostrar que si $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$, entonces existe un único $\mathcal{B}' \sqsubseteq \mathcal{B}$ tal que $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}'$.
(*Sugerencia*: utilizar el ejercicio 8.)

(5) Deducir de (4) que si $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B} \leq A$, entonces $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Ejercicio 10 (Preorden total)**.** — Sean $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$, $\mathcal{B} = (B, \leq_B)$ dos conjuntos bien ordenados cualesquiera. Se definen $S_0 = \bigcup\{S \in Seg(\mathcal{A}) : (S, (\leq_A)_{\restriction S}) \leq \mathcal{B}\}$ y $\leq_{S_0} = (\leq_A)_{\restriction S_0}$.

(1) Demostrar que S_0 es el segmento inicial de $\mathcal{A}$ más grande tal que $(S_0, \leq_{S_0}) \leq \mathcal{B}$.
(*Sugerencia*: utilizar el ejercicio 9 (4) para pasar al límite.)

(2) Demostrar que $S = A$ o $(S_0, \leq_{S_0}) \simeq \mathcal{B}$.

(3) Deducir de (2) que $\mathcal{A} \leq \mathcal{B}$ o $\mathcal{B} \leq \mathcal{A}$. (Esto muestra que el preorden $\leq$ es total.)

Ejercicio 11 (Buen preorden)**.** — Adaptando la técnica del ejercicio anterior, demostrar que la clase de los conjuntos bien ordenados («cbo») también está bien preordenada, es decir:

$$\exists \mathcal{A}\, (\mathcal{A} \text{ cbo} \wedge \phi(\mathcal{A})) \ \Rightarrow \ \exists \mathcal{A}\, (\mathcal{A} \text{ cbo} \wedge \phi(\mathcal{A}) \wedge \forall \mathcal{B}\, (\mathcal{B} \text{ cbo} \wedge \phi(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{A} \leq \mathcal{B}))$$

donde $\phi(\mathcal{A})$ es cualquier predicado definido sobre la clase «cbo».