Práctico 3: ordinales

Ejercicio 1 (Sucesión normal de ordinales)**.** Se dice que una sucesión transfinita de ordinales $(\gamma_\alpha)_{\alpha:On}$ es *normal* cuando:

(i) La sucesión $(\gamma_\alpha)_{\alpha:On}$ es estrictamente creciente: si $\alpha < \beta$, entonces $\gamma_\alpha < \gamma_\beta$.
(ii) Para todo ordinal límite α: $\gamma_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \gamma_\beta$.

Fijada una sucesión normal de ordinales $(\gamma_\alpha)_{\alpha:On}$, demostrar los siguientes enunciados:

(1) Para todo conjunto X de ordinales, $X \neq \emptyset$, tenemos que $\sup_{\alpha\in X} \gamma_\alpha = \gamma_{\sup(X)}$.
(2) Para todo ordinal α, tenemos que $\alpha \leq \gamma_\alpha$.
(3) Para todo ordinal α, existe un ordinal $\beta \geq \alpha$ tal que $\beta = \gamma_\beta$ («punto fijo»).
(*Sugerencia:* considerar la sucesión $(\beta_n)_{n\in\omega}$ definida por $\beta_0 = \alpha$ y $\beta_{n+1} = \gamma_{\beta_n}$.)

Aritmética de ordinales

Se recuerda que la suma $\alpha + \beta$, el producto $\alpha \cdot \beta$ y la potencia α^β de dos ordinales α y β están definidos a partir de las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{lll@{\qquad}lll@{\qquad}lll@{\qquad}l}
\alpha + 0 & := & \alpha & \alpha \cdot 0 & := & 0 & \alpha^0 & := & 1 & \\
\alpha + s(\beta) & := & s(\alpha+\beta) & \alpha \cdot s(\beta) & := & \alpha\cdot\beta + \alpha & \alpha^{s(\beta)} & := & \alpha^\beta \cdot \alpha & \\
\alpha + \lambda & := & \sup\limits_{\beta<\lambda}(\alpha+\beta) & \alpha \cdot \lambda & := & \sup\limits_{\beta<\lambda}(\alpha\cdot\beta) & \alpha^\lambda & := & \sup\limits_{\beta<\lambda}(\alpha^\beta) & (\lambda \text{ límite})
\end{array}$$

El producto $\alpha \cdot \beta$ también se escribe $\beta\alpha$ (al revés y sin punto).

Ejercicio 2 (Propiedades de la suma)**.** Demostrar los siguientes enunciados

(1) Fijado $\alpha : On$, la sucesión $(\alpha + \beta)_{\beta:On}$ es normal (véase Ejercicio 1)
(2) $0 + \alpha = \alpha + 0 = \alpha$ (0 es neutro para +)
(3) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (+ es asociativa)
(4) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$ (+ se simplifica por la izquierda)

(*Sugerencia:* usar el resultado del Ejercicio 1 (1).) Dar ejemplos de ordinales tales que:

(5) $\alpha + \beta \neq \beta + \alpha$ (+ no es conmutativa)
(6) $\beta + \alpha = \gamma + \alpha \not\Rightarrow \beta = \gamma$ (+ no se simplifica por la derecha)

Ejercicio 3 (Propiedades del producto)**.** Demostrar los siguientes enunciados:

(1) Fijado $\alpha : On$, la sucesión $(\alpha \cdot \beta)_{\beta:On}$ es normal (véase Ejercicio 1)
(2) $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$ (0 es absorbente para ·)
(3) $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$ (1 es neutro para ·)
(4) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ (· es asociativa)
(5) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ (· es distributiva por la izquierda)
(6) $\alpha > 0 \wedge \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$ (· se simplifica por la izquierda)

(*Sugerencia:* usar el resultado del Ejercicio 1 (1).) Dar ejemplos de ordinales tales que:

(7) $\alpha \cdot \beta \neq \beta \cdot \alpha$ (· no es conmutativa)

(8) $(\beta + \gamma) \cdot \alpha \neq \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$ (· no es distributiva a la derecha)

(9) $\alpha > 0 \ \wedge \ \beta \cdot \alpha = \gamma \cdot \alpha \ \not\Rightarrow \ \beta = \gamma$ (· no se simplifica por la derecha)

Ejercicio 4 (Suma en ω^ω)**.** El objetivo de este ejercicio es demostrar que los elementos del ordinal ω^ω son exactamente los ordinales α de la forma

$$\alpha \ = \ n_1\omega^{p_1} + \cdots + n_k\omega^{p_k} \qquad \text{(Forma normal de Cantor)}$$

para algunos $k \in \omega$, $n_1, \ldots, n_k \in \omega - \{0\}$ y $p_1, \ldots, p_k \in \omega$ tales que $p_1 > \cdots > p_k$.

(1) Probar que para todos $n, m \in \omega - \{0\}$ y $p, q \in \omega$ tales que $p < q$, tenemos que

$$m\omega^p + n\omega^q = n\omega^q$$

(2) Llevar los siguientes ordinales a forma normal de Cantor (calculando las sumas). Se interpretarán los primeros dos con un dibujo.
   - $\omega + 5 + \omega + 7$
   - $5\omega + 8 + \omega^2$
   - $3\omega^2 + 5\omega + 20 + 2\omega^2 + 35$

(3) Demostrar que los ordinales $\alpha < \omega^\omega$ son los de la forma $\alpha = n_1\omega^{p_1} + \cdots + n_k\omega^{p_k}$ para algunos $k \in \omega$, $n_1, \ldots, n_k \in \omega - \{0\}$ y $p_1, \ldots, p_k \in \omega$ tales que $p_1 > \cdots > p_k$.

(4) Dados $\alpha, \beta \in \omega^\omega$ en forma normal de Cantor, calcular $\alpha + \beta$ en forma normal de Cantor.

Ejercicio 5 (Propiedades de la potencia)**.** Demostrar los siguientes enunciados:

(1) Fijado $\alpha : On$, la sucesión $(\alpha^\beta)_{\beta : On}$ es normal (véase Ejercicio 1)

(2) $\alpha^0 = 1$

(3) $\alpha^1 = \alpha$

(4) $\alpha > 0 \ \Rightarrow \ 0^\alpha = 0$

(5) $1^\alpha = 1$

(6) $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \cdot \alpha^\gamma$

(7) $\alpha^{\beta \cdot \gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$

(8) $\alpha > 1 \ \wedge \ \alpha^\beta = \alpha^\gamma \ \Rightarrow \ \beta = \gamma$

(9) α, β numerables $\Rightarrow$ α^β numerable

Dar ejemplos de ordinales tales que:

(10) $(\alpha \cdot \beta)^\gamma \neq \alpha^\gamma \cdot \beta^\gamma$

(11) $\alpha > 0 \ \wedge \ \beta^\alpha = \gamma^\alpha \ \not\Rightarrow \ \beta = \gamma$

Ejercicio 6 (Forma normal de Cantor)**.**

(1) Demostrar que para todos ordinales α, β tales que $\alpha > 0$ y $\beta > 1$, existe una única terna de ordinales $(\gamma, \delta, \varepsilon)$ tal que $\alpha = \beta^\gamma \cdot \delta + \varepsilon$, con $0 < \delta < \beta$ y $\varepsilon < \beta^\gamma$.

(2) Deducir de lo anterior que todo ordinal α tiene una única escritura de la forma

$$\alpha \ = \ n_1\omega^{\beta_1} + n_2\omega^{\beta_2} + \cdots + n_k\omega^{\beta_k} \qquad \text{(Forma normal de Cantor)}$$

donde $k \in \omega$, $\beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_k \geq 0$ y $n_1, \ldots, n_k \in \omega - \{0\}$.

Propiedades del ordinal ω_1

Ejercicio 7 (Puntos de clausura)**.** Sea $f : \omega_1 \to \omega_1$ una función cualquiera, donde ω_1 $(= \aleph_1)$ es el primer ordinal no numerable. Se dice que un ordinal $\alpha < \omega_1$ es un *punto de clausura* de f cuando $f(\beta) < \alpha$ para todo $\beta < \alpha$. El objetivo de este ejercicio es demostrar que para todo ordinal $\alpha < \omega_1$, la función f tiene un punto de clausura $\alpha' \geq \alpha$ (con $\alpha' < \omega_1$). Para ello, fijado un ordinal $\alpha < \omega_1$, se considera la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega} \in \omega_1^\omega$ definida por:

$$\alpha_0 := \alpha \qquad \text{y} \qquad \alpha_{n+1} := \text{máx}(\alpha_n,\ \sup\{f(\beta) : \beta < \alpha_n\} + 1) \qquad\qquad (n \in \omega)$$

(1) Verificar que la sucesión $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ está bien definida (es decir: $\alpha_n < \omega_1$ para todo $n \in \omega$) y que es monótona creciente.

(2) Se considera el ordinal $\alpha' := \sup\{\alpha_n : n \in \omega\}$. Verificar que $\alpha' < \omega_1$ y demostrar que α' es un punto de clausura de f.

Ejercicio 8 (El subterráneo transfinito)**.** En Cantor-city, hay una línea de subterráneo transfinita, que conecta el aeropuerto al hotel de Hilbert[1]. Sus estaciones están numeradas por todos los ordinales entre 0 (Aeropuerto) y ω_1 (Hotel de Hilbert), donde ω_1 $(= \aleph_1)$ es el primer ordinal no numerable. En la Estación 0, $\aleph_0$ pasajeros entran en el tren. Luego, en cada estación α tal que $0 < \alpha < \omega_1$, pasan dos cosas:

- Primero: Si el tren no es vacío cuando entra en la estación α, un único pasajero sale del tren. Éste no puede entrar más en el tren (en ninguna estación $\alpha' \geq \alpha$).
- Segundo: $\aleph_0$ (nuevos) pasajeros entran en el tren.

(Así, en cada estación $\alpha < \omega_1$, hay 1 salida cuando es posible, y $\aleph_0$ entradas siempre.)
El objetivo del ejercicio es determinar la cantidad de pasajeros que llegan a la Estación ω_1.
Para ello, se escriben:

- P_α al conjunto de los pasajeros en el tren cuando entra en la estación α $\quad (0 \leq \alpha \leq \omega_1)$
- S_α al conjunto de los pasajeros que salen del tren en la estación α $\quad (0 \leq \alpha < \omega_1)$
- E_α al conjunto de los pasajeros que entran en el tren en la estación α $\quad (0 \leq \alpha < \omega_1)$

(1) Formalizar los datos del problema en forma de ecuaciones recursivas sobre las familias de conjuntos $(P_\alpha)_{\alpha\leq\omega_1}$, $(S_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ y $(E_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$.

(2) Demostrar que $\text{Card}(P_\alpha) \leq \aleph_0$ para todo $\alpha < \omega$. ¿Se puede concluir que $\text{Card}(P_{\omega_1}) \leq \aleph_0$?

Para todo $\alpha < \omega_1$, se escribe Ω_α al conjunto de las estaciones $\beta < \omega_1$ en las cuales salieron los pasajeros que entraron en el tren en la estación α, es decir:

$$\Omega_\alpha \ := \ \{\beta \in \omega_1 \ : \ \exists x \in E_\alpha,\ x \in S_\beta\} \qquad\qquad (\subseteq \omega_1)$$

Para todo $\alpha < \omega_1$, se escribe $f(\alpha) := \sup \Omega_\alpha$.

(3) Demostrar que $\text{Card}(\Omega_\alpha) \leq \aleph_0$ para todo $\alpha < \omega_1$, y deducir que $f(\alpha) < \omega_1$.

(4) Demostrar que si $\alpha < \omega_1$ es un punto de clausura de la función $f : \omega_1 \to \omega_1$ (véase Ejercicio 7), entonces el tren es vacío cuando entra en la estación α: $P_\alpha = \varnothing$.
(Sugerencia: razonar por el absurdo, considerando el pasajero $x \in S_\alpha$.)

(5) Usando el resultado demostrado en el Ejercicio 7, deducir de lo anterior que, cuando llega a la estación ω_1 (Hotel de Hilbert), el tren es vacío: $P_{\omega_1} = \varnothing$ (!)

[1] De hecho, el hotel de Hilbert de Cantor-city cerró hace unos años, por razones que vamos a explicar aquí.