Práctico 4: Axioma de elección y cardinales

Axioma de elección

Se dice que un conjunto A es *bien ordenable* cuando A admite un buen orden.

Ejercicio 1 (Elección sin AC)**.** Demostrar en ZF *sin AC* los siguientes enunciados:

(1) Todo conjunto finito o numerable es bien ordenable.
(2) Todo conjunto bien ordenable admite una función de elección.
(3) Toda relación de equivalencia sobre un conjunto bien ordenable admite un sistema de representantes.
(4) Toda función sobreyectiva definida sobre un conjunto bien ordenable admite una inversa por la derecha.
(5) El producto cartesiano de una familia finita de conjuntos no vacíos nunca es vacío.

Axioma de elección dependiente El *axioma de elección dependiente* (DC)[1] es una forma débil del axioma de elección (AC) dada por la siguiente fórmula:

$$(\forall A \neq \varnothing)(\forall R \subseteq A \times A)\,[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\,R\,y \;\Rightarrow\; (\exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^{\omega})(\forall n \in \omega)\, x_n\,R\,x_{n+1}] \tag{DC}$$

Así, a partir de un conjunto $A \neq \varnothing$ y de una relación $R \subseteq A \times A$ tal que $(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\,R\,y$, este axioma elige una sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in A^{\omega}$ tal que $x_0\,R\,x_1\,R\,x_2\,R\,x_3 \cdots x_n\,R\,x_{n+1} \cdots$

Ejercicio 2. Demostrar en ZF que: AC $\Rightarrow$ DC.

A veces, se considera la siguiente formulación del axioma de elección dependiente, que permite fijar el primer elemento $x_0 = x$ de la sucesión $(x_n)_{n\in\omega} \in A^{\omega}$:

$$\forall A\, (\forall R \subseteq A \times A)\,[(\forall x \in A)(\exists y \in A)\, x\,R\,y \;\Rightarrow\; (\forall x \in A)(\exists (x_n)_{n\in\omega} \in A^{\omega})(x_0 = x \wedge (\forall n \in \omega)\, x_n\,R\,x_{n+1})] \tag{DC$_0$}$$

Ejercicio 3. Demostrar en ZF que: $\mathrm{DC}_0 \Leftrightarrow \mathrm{DC}$.

(*Sugerencia:* para demostrar la implicación $\mathrm{DC} \Rightarrow \mathrm{DC}_0$ con un elemento inicial $x \in A$ fijado, se puede considerar el conjunto A' formado por todas las sucesiones finitas $(x_i)_{i\leq n} \in A^{[0..n]}$ tales que $x_0 = x$ y $x_{i-1}\,R\,x_i$ para todo $i \in [1..n]$, equipado con la relación $R' \subseteq A' \times A'$ definida por: $(x_i)_{i\leq n}\,R'\,(y_i)_{i\leq m} \;\equiv\; m = n+1 \wedge (\forall i \leq n)\, x_i = y_i$.)

[1]*Axiom of dependent choices* en inglés.

Axioma de elección numerable El *axioma de elección numerable* (CC)[2] es una forma débil del axioma de elección (AC) dada por la siguiente fórmula:

$$\forall (A_i)_{i\in I}\Big[I \text{ numerable } \wedge\ (\forall i\in I)\, A_i \neq \varnothing\ \Rightarrow\ \Big(\prod_{i\in I} A_i\Big) \neq \varnothing\Big].$$

Ejercicio 4. Demostrar en ZF que $DC_0 \Rightarrow CC$, donde DC_0 es el axioma de elección dependiente con elemento inicial fijado. Deducir (en ZF) que: AC $\Rightarrow$ DC $\Rightarrow$ CC.

Se recuerda que un conjunto A es:

- *finito* cuando $A \sim n$ para algún $n \in \omega$;
- *infinito* cuando $A \nsim n$ para todo $n \in \omega$;
- *Dedekind-infinito* cuando existe una función $f : A \to A$ inyectiva y no sobreyectiva.

El objetivo del siguiente ejercicio es demostrar que en ZF + CC, un conjunto A es infinito si y sólo si A es Dedekind-infinito.

Ejercicio 5. Sea A un conjunto.

(1) Demostrar en ZF (sin CC) que si A es Dedekind-infinito, entonces A es infinito.

Para demostrar la recíproca (con CC), se supone ahora que A es un conjunto infinito.

(2) Demostrar por inducción que para todo $n \in \omega$, existe una inyección $f : n \hookrightarrow A$.
(3) Usando el axioma de elección numerable (CC), deducir que existe una sucesión de inyecciones $(f_n : n \hookrightarrow A)_{n\in\omega}$.
(4) A partir de una sucesión cualquiera de inyecciones $(f_n : n \hookrightarrow A)_{n\in\omega}$, construir (sin CC) otra sucesión de inyecciones $(f'_n : n \hookrightarrow A)_{n\in\omega}$ tal que $f'_n \subseteq f'_{n+1}$ para todo $n \in \omega$.
(5) Deducir de lo anterior que el conjunto A es Dedekind-infinito.

Cardinales

Ejercicio 6. El objetivo de este ejercicio es demostrar (sin axioma de elección) que todo ordinal infinito α es equipotente al producto cartesiano $\alpha \times \alpha$, es decir: $\alpha \sim (\alpha \times \alpha)$. Para ello, se supone por el absurdo que no es el caso, y se escribe λ al ordinal infinito más pequeño tal que $\lambda \nsim \lambda \times \lambda$. Se equipa el producto cartesiano $\lambda \times \lambda$ con la relación binaria $(\leq_2)$ definida[3] para todos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \lambda \times \lambda$ por

$$\begin{array}{rcll}(x_1, y_1) \leq_2 (x_2, y_2) & \equiv & \text{máx}(x_1, y_1) < \text{máx}(x_2, y_2) & \vee \\ & & (\text{máx}(x_1, y_1) = \text{máx}(x_2, y_2) \wedge x_1 < x_2) & \vee \\ & & (\text{máx}(x_1, y_1) = \text{máx}(x_2, y_2) \wedge x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq y_2)\,. & \end{array}$$

(1) Demostrar que la relación $(\leq_2)$ es un buen orden sobre $\lambda \times \lambda$.
(2) Construir un encaje de conjuntos (bien) ordenados $f : (\lambda, \leq) \hookrightarrow (\lambda \times \lambda, \leq_2)$, es decir: una función $f : \lambda \to \lambda \times \lambda$ tal que $(\forall x, y\in \lambda)\,(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq_2 f(y))$.

[2]*Axiom of countable choice* en inglés.
[3]Esta definición es debida a Kurt Gödel.

En lo siguiente, se escriben α al único ordinal isomorfo al conjunto bien ordenado $(\lambda\times\lambda,\leq_2)$, y $h:(\lambda\times\lambda)\xrightarrow{\sim}\alpha$ al isomorfismo correspondiente.

(3) Deducir de lo anterior que $\lambda<\alpha$.

Como $\lambda\in\alpha$, se definen $(a,b):=h^{-1}(\lambda)\ (\in\lambda\times\lambda)$ y $\gamma:=\text{máx}(a,b)+1$.

(4) Demostrar que el ordinal λ es isomorfo al segmento inicial $Seg(a,b)$ en $(\lambda\times\lambda,\leq_2)$.

(5) Demostrar que $Seg(a,b)\subseteq(\gamma\times\gamma)$. Deducir que el ordinal γ es infinito.

(6) Deducir de lo anterior que existe una inyección $\lambda\hookrightarrow\gamma$.

(7) Mostrar que (6) lleva a una contradicción, lo que acaba la demostración del resultado.

(8) Con el axioma de elección (AC), deducir que $A\times A\sim A$ para todo conjunto infinito A.

Ejercicio 7 (Propiedades de los cardinales infinitos)**.**

(1) Demostrar que todo cardinal infinito es un ordinal límite, y dar ejemplos de ordinales límites que no son cardinales.

(2) Demostrar que la sucesión transfinita $(\aleph_\alpha)_{\alpha:On}$ es normal.

(3) Usando los resultados del Ejercicio 1 del Práctico 3, deducir de lo anterior que:
  (a) para todo ordinal α, tenemos que $\alpha\leq\aleph_\alpha$;
  (b) para todo ordinal α, existe un ordinal $\beta\geq\alpha$ tal que $\beta=\aleph_\beta$ («punto fijo»).

Ejercicio 8 (Teorema de König)**.** En ZFC, se consideran dos familias de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$ y $(B_i)_{i\in I}$ (I cualquiera), tales que $\mathrm{Card}(A_i)<\mathrm{Card}(B_i)$ para todo $i\in I$. Se escriben:

- $S:=\sum_{i\in I}A_i$ a la suma directa de la familia $(A_i)_{i\in I}$, equipada con la familia de las inyecciones canónicas $\sigma_i:A_i\to S$ $(i\in I)$.
- $P:=\prod_{i\in I}B_i$ al producto cartesiano (generalizado) de la familia $(B_i)_{i\in I}$, equipado con la familia de las proyecciones $\pi_i:P\to B_i$ $(i\in I)$.

Sea $f:S\to P$ una función cualquiera. Para todo $i\in I$, se considera la función $f_i:A_i\to B_i$ definida por $f_i:=\pi_i\circ f\circ\sigma_i$.

(1) Demostrar que existe un elemento $p\in P$ tal que $\pi_i(p)\notin\mathrm{img}(f_i)$ para todo $i\in I$.
(*Sugerencia:* usar la hipótesis $\mathrm{Card}(A_i)<\mathrm{Card}(B_i)$.)

(2) Demostrar que $p\notin\mathrm{img}(f)$, y deducir que la función f no es sobreyectiva.

(3) Deducir de lo anterior el teorema de König:

Si $(\kappa_i)_{i\in I}$ y $(\mu_i)_{i\in I}$ son dos familias de cardinales indizadas por un conjunto I cualquiera, tales que $\kappa_i<\mu_i$ para todo $i\in I$, entonces:

$$\sum_{i\in I}\kappa_i\ <\ \prod_{i\in I}\mu_i\,.$$

¿Qué se observa en el caso particular donde $\kappa_i=1$ y $\mu_i=2$ para todo $i\in I$?

Ejercicio 9 (Aplicación del teorema de König)**.** En este ejercicio, se trabaja en ZFC.

(1) Demostrar que: $\displaystyle\sum_{n\in\omega}\aleph_n\ =\ \aleph_\omega$.

(2) Con el teorema de König (Ejercicio 8), deducir que: $\aleph_\omega<\aleph_\omega^{\aleph_0}$.

Se recuerda que $\mathrm{Card}(\mathbb{R}) = \mathrm{Card}(\mathfrak{P}(\omega)) = 2^{\aleph_0}$ («potencia del continuo»).

(3) Demostrar que $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$, y deducir de lo anterior que $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$.

Ejercicio 10 (Cardinal del conjunto de los Borelianos de $\mathbb{R}^n$)**.** Fijado $n \geq 1$, se escribe $\mathcal{A}$ al conjunto de todos los conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$. Se define el conjunto $\mathcal{B}$ de los *Borelianos* de $\mathbb{R}^n$ como la menor σ-álgebra de $\mathbb{R}^n$ que contiene a $\mathcal{A}$, es decir el menor subconjunto de $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ que contiene a $\mathcal{A}$ y es cerrado por complementos, uniones numerables e intersecciones numerables. El objetivo de este ejercicio es demostrar $\mathcal{B}$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$. Para ello, se considera la sucesión transfinita $(P_\alpha)_{\alpha:On}$ de subconjuntos de $\mathfrak{P}(\mathbb{R}^n)$ definida por:

$$\begin{aligned}
P_0 &= \mathcal{A} \\
P_{s(\alpha)} &= \Big\{\bigcup_{n\in\omega} A_n \;\Big|\; (A_n)_{n\in\omega} \in P_\alpha^\omega\Big\} \cup \Big\{\bigcap_{n\in\omega} A_n \;\Big|\; (A_n)_{n\in\omega} \in P_\alpha^\omega\Big\} \cup \{A^c \mid A \in P_\alpha\} \\
P_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} P_\beta \qquad \text{si } \alpha \text{ es límite}
\end{aligned}$$

Sean ω_1 el primer ordinal no numerable y $\mathfrak{c} = \mathrm{Card}(\mathbb{R})$ (« cardinal del continuo »). El objetivo de las siguientes preguntas es demostrar que P_{ω_1} tiene cardinal $\mathfrak{c}$ y es igual a $\mathcal{B}$.

(1) Demostrar que $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) = \mathfrak{c}$

(2) Demostrar que para cada $\alpha < \omega_1$, $\mathrm{Card}(P_\alpha) = \mathfrak{c}$

(3) Demostrar que $\mathrm{Card}(P_{\omega_1}) = \mathfrak{c}$. ¿Se necesita usar la hipótesis del continuo?

(4) Demostrar que cualquier σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$ también contiene a P_{ω_1}.
(De hecho contiene a P_α para cualquier ordinal α.)

(5) Demostrar que P_{ω_1} es una σ-álgebra y concluir que es igual a $\mathcal{B}$.