Práctico 5: Deducción natural

Definiciones Sea $\mathcal{V}$ el vocabulario de un lenguaje de primer orden.

- Los *términos* (notación: t, u, v, etc.) están definidos por la gramática:

$$t, u, v \ ::= \ x \ | \ f(t_1, \dots, t_k)$$

(donde f es cualquier símbolo de función de aridad k en el vocabulario $\mathcal{V}$).

- Las *fórmulas* (notación: ϕ, ψ, χ, etc.) están definidas por la gramática:

$$\begin{array}{llr} \phi, \psi, \chi \ ::= & \top \ | \ \bot \ | \ t_1 = t_2 \ | \ p(t_1, \dots, t_k) & \text{(Fórmulas atómicas)} \\ | & \neg\phi \ | \ \phi \land \psi \ | \ \phi \lor \psi \ | \ \phi \Rightarrow \psi \ | \ \phi \Leftrightarrow \psi & \text{(Conectivas)} \\ | & \forall x\, \phi \ | \ \exists x\, \phi & \text{(Cuantificadores)} \end{array}$$

(donde p es cualquier símbolo de predicado de aridad k en el vocabulario $\mathcal{V}$).

- Los *contextos* (notación: Γ, Δ, etc.) son las listas finitas de fórmulas:

$$\Gamma, \Delta \ ::= \ \phi_1, \dots, \phi_n \qquad (n \geq 0)$$

- Un *secuente* es un par escrito $\Gamma \vdash \phi$ («ϕ es consecuencia de Γ», o «Γ demuestra ϕ»), donde Γ es un contexto (el *antecedente*, cuyos elementos se llaman las *hipótesis* del secuente) y ϕ una fórmula (el *consecuente*, o la *conclusión* del secuente).

Las reglas de deducción del sistema NK («deducción natural clásica») son las siguientes:

(Axioma) $$\frac{}{\Gamma \vdash \phi}\ (\text{si } \phi \in \Gamma)$$

$(\top, \bot)$ $$\frac{}{\Gamma \vdash \top} \qquad \frac{\Gamma, \neg\phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}\ \text{(Absurdo)}$$

$(\neg)$ $$\frac{\Gamma, \phi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \bot}$$

$(\land)$ $$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \land \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \land \psi}{\Gamma \vdash \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \land \psi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$(\lor)$ $$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \lor \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \lor \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \lor \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \chi \quad \Gamma, \psi \vdash \chi}{\Gamma \vdash \chi}$$

$(\Rightarrow)$ $$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi}$$

$(\Leftrightarrow)$ $$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi \quad \Gamma, \psi \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi}$$

$(\forall)$ $$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x\, \phi}\ (\text{si } x \notin FV(\Gamma)) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x\, \phi}{\Gamma \vdash \phi[x := t]}$$

$(\exists)$ $$\frac{\Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \exists x\, \phi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\, \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\text{si } x \notin FV(\Gamma, \psi))$$

$(=)$ $$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} \qquad \frac{\Gamma \vdash t = u \quad \Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \phi[x := u]}$$

Reglas admisibles Dados secuentes $S_1, \ldots, S_p$ y S, se dice que la regla

$$\frac{S_1 \ \cdots \ S_p}{S}$$

es *admisible* (en un sistema de deducción cualquiera) cuando cumple la propiedad que:

Si los secuentes $S_1, \ldots, S_n$ son derivables, entonces el secuente S es derivable.

Es claro que toda regla admisible (indicada tradicionalmente con una doble raya de inferencia) se puede agregar al sistema de deducción sin cambiar la clase de los secuentes derivables.

En lo siguiente, se autorizará el uso de las siguientes reglas, que son admisibles[1] en NK:

Permutación:	Debilitamiento:	Contracción:	*Ex falso quod libet*
$\dfrac{\phi_1, \ldots, \phi_n \vdash \psi}{\phi_{\sigma(1)}, \ldots, \phi_{\sigma(n)} \vdash \psi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}$	$\dfrac{\Gamma, \phi, \phi \vdash \psi}{\Gamma, \phi \vdash \psi}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash \phi}$

(donde σ es cualquier permutación de los enteros $1..n$).

Ejercicio 1. — Derivar las siguientes fórmulas:

- Equivalencias notables del cálculo proposicional:

$\phi \land \phi \Leftrightarrow \phi$	$\phi \lor \phi \Leftrightarrow \phi$
$\phi \land \psi \Leftrightarrow \psi \land \phi$	$\phi \lor \psi \Leftrightarrow \psi \lor \phi$
$(\phi \land \psi) \land \chi \Leftrightarrow \phi \land (\psi \land \chi)$	$(\phi \lor \psi) \lor \chi \Leftrightarrow \phi \lor (\psi \lor \chi)$
$\phi \land \top \Leftrightarrow \phi$	$\phi \lor \bot \Leftrightarrow \phi$
$\phi \land \bot \Leftrightarrow \bot$	$\phi \lor \top \Leftrightarrow \top$
$\phi \land (\psi \lor \chi) \Leftrightarrow (\phi \land \psi) \lor (\phi \land \chi)$	$\phi \lor (\psi \land \chi) \Leftrightarrow (\phi \lor \psi) \land (\phi \lor \chi)$
$(\phi \Rightarrow \psi \land \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \psi) \land (\phi \Rightarrow \chi)$	$(\phi \Rightarrow \psi \lor \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \psi) \lor (\phi \Rightarrow \chi)$
$(\phi \land \psi \Rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \chi) \lor (\psi \Rightarrow \chi)$	$(\phi \lor \psi \Rightarrow \chi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \chi) \land (\psi \Rightarrow \chi)$
$(\top \Rightarrow \phi) \Leftrightarrow \phi$	$(\phi \Rightarrow \bot) \Leftrightarrow \neg\phi$
$(\bot \Rightarrow \phi) \Leftrightarrow \top$	$(\phi \Rightarrow \top) \Leftrightarrow \top$
$(\phi \Rightarrow (\psi \Rightarrow \chi)) \Leftrightarrow (\phi \land \psi \Rightarrow \chi)$	

- Equivalencias notables del cálculo de predicados:

$\forall x\,(\phi \land \psi) \Leftrightarrow \forall x\,\phi \land \forall x\,\psi$		$\exists x\,(\phi \lor \psi) \Leftrightarrow \exists x\,\phi \lor \exists x\,\psi$	
$\forall x\,\phi \lor \forall x\,\psi \Rightarrow \forall x\,(\phi \lor \psi)$		$\exists x\,(\phi \land \psi) \Rightarrow \exists x\,\phi \land \exists x\,\psi$	
$\forall x\,\phi \Leftrightarrow \phi$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\,\phi \Leftrightarrow \phi$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\,(\phi \land \psi) \Leftrightarrow \phi \land \forall x\,\psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\,(\phi \lor \psi) \Leftrightarrow \phi \lor \exists x\,\psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\,(\phi \lor \psi) \Leftrightarrow \phi \lor \forall x\,\psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\,(\phi \land \psi) \Leftrightarrow \phi \land \exists x\,\psi$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\,(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \forall x\,\psi)$	(si $x \notin FV(\phi)$)	$\exists x\,(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\phi \Rightarrow \exists x\,\psi)$	(si $x \notin FV(\phi)$)
$\forall x\,(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\exists x\,\phi \Rightarrow \psi)$	(si $x \notin FV(\psi)$)	$\exists x\,(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\forall x\,\phi \Rightarrow \psi)$	(si $x \notin FV(\psi)$)

- Tautologías clásicas y leyes de De Morgan:

$\neg\neg\phi \Leftrightarrow \phi$	$\phi \lor \neg\phi$
$\neg\top \Leftrightarrow \bot$	$\neg\bot \Leftrightarrow \top$
$\neg(\phi \land \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \lor \neg\psi$	$\neg(\phi \lor \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \land \neg\psi$
$\neg(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \phi \land \neg\psi$	$(\phi \Rightarrow \psi) \Leftrightarrow \neg\phi \lor \psi$
$\neg\forall x\,\phi \Leftrightarrow \exists x\,\neg\phi$	$\neg\exists x\,\phi \Leftrightarrow \forall x\,\neg\phi$
$((\phi \Rightarrow \psi) \Rightarrow \phi) \Rightarrow \phi$	(ley de Peirce)

[1] Este resultado de admisibilidad es el objeto del Ejercicio 5 p. 4.

- Igualdad:
  $\forall x\,(x = x)$
  $\forall x\,\forall y\,(x = y \Rightarrow y = x)$
  $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
  $\forall x\,\forall y\,(x = y \Rightarrow t[z := x] = t[z := y])$
  $\forall x\,\forall y\,(x = y \Rightarrow (\phi[z := x] \Leftrightarrow \phi[z := y]))$

Ejercicio 2 (Conmutación de cuantificadores)**.** — El objetivo del ejercicio es mostrar la importancia de las "condiciones de frescura" que restringen el uso de la reglas $\forall$-intro. y $\exists$-elim.:

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \forall x\,\phi}\ (\text{si } x \notin FV(\Gamma)) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x\,\phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\text{si } x \notin FV(\Gamma, \psi))$$

Para ello, se considera una fórmula $\phi \equiv \phi(x, y)$ que depende (al menos) de dos variables x e y.

(1) Derivar las siguientes equivalencias:
  (a) $\forall x\,\forall y\,\phi(x, y) \ \Leftrightarrow\ \forall y\,\forall x\,\phi(x, y)$
  (b) $\exists x\,\exists y\,\phi(x, y) \ \Leftrightarrow\ \exists y\,\exists x\,\phi(x, y)$
  verificando que las derivaciones respetan las condiciones de frescura.

(2) Derivar las siguientes implicaciones:
  (a) $\exists x\,\forall y\,\phi(x, y) \ \Rightarrow\ \forall y\,\exists x\,\phi(x, y)$ respetando las condiciones de frescura;
  (b) $\forall y\,\exists x\,\phi(x, y) \ \Rightarrow\ \exists x\,\forall y\,\phi(x, y)$ sin respetar las condiciones de frescura.

(3) Con contraejemplos en la matemática usual (convergencia simple/uniforme, continuidad simple/uniforme, etc.), explicar por qué la implicación del ítem (2.b) es falsa.

Ejercicio 3 (Una función involutiva)**.** — Se trabaja en un vocabulario $\mathcal{V}$ con un símbolo de función f de aridad 1, que representa una función definida sobre todo el universo del discurso. Derivar el teorema que dice que «si f es involutiva, entonces f es biyectiva», es decir:

$$\forall x\, f(f(x)) = x \ \Rightarrow\ \forall x\,\forall x'\,(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \ \wedge\ \forall y\,\exists x\, f(x) = y\,.$$

Ejercicio 4 (Unicidad de las construcciones lógicas)**.** — El objetivo de este ejercicio es mostrar que las reglas de cada conectiva (resp. cada cuantificador) *determinan* dicha conectiva (resp. dicho cuantificador). Para ello, se extiende el lenguaje de las fórmulas

$$\begin{array}{rcl} \phi, \psi & ::= & p(t_1, \ldots, t_k) \\ & & \mid t_1 = t_2 \mid \top \mid \bot \mid \neg\phi \mid \phi \wedge \psi \mid \phi \vee \psi \mid \phi \Rightarrow \psi \mid \phi \Leftrightarrow \psi \mid \forall x\,\phi \mid \exists x\,\phi \\ & & \mid t_1 =^* t_2 \mid \top^* \mid \bot^* \mid \neg^*\phi \mid \phi \wedge^* \psi \mid \phi \vee^* \psi \mid \phi \Rightarrow^* \psi \mid \phi \Leftrightarrow^* \psi \mid \forall^* x\,\phi \mid \exists^* x\,\phi \end{array}$$

duplicando cada construcción lógica ($=$, $\top$, $\bot$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ $\forall$, $\exists$) con una versión "estrellada" ($=^*$, $\top^*$, $\bot^*$, $\neg^*$, $\wedge^*$, $\vee^*$, $\Rightarrow^*$, $\Leftrightarrow^*$, $\forall^*$, $\exists^*$). Del mismo modo, se duplican todas las reglas de introducción y de eliminación del sistema NK con versiones estrelladas:

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow^* \psi} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow^* \psi \quad \Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \psi} \qquad \cdots \qquad \frac{}{\Gamma \vdash t =^* t} \qquad \frac{\Gamma \vdash t =^* u \quad \Gamma \vdash \phi[x := t]}{\Gamma \vdash \phi[x := u]}$$

(por supuesto, no se duplica la regla axioma). Se escribe NK* el resultante sistema.

(1) En el sistema NK*, derivar las siguientes equivalencias:

$$\begin{array}{rclcrclcrcl}
\top^* & \Leftrightarrow & \top & \quad & \phi \wedge^* \psi & \Leftrightarrow & \phi \wedge \psi & \quad & \forall^* x\,\phi & \Leftrightarrow & \forall x\,\phi \\
\bot^* & \Leftrightarrow & \bot & & \phi \vee^* \psi & \Leftrightarrow & \phi \vee \psi & & \exists^* x\,\phi & \Leftrightarrow & \exists x\,\phi \\
t_1 =^* t_2 & \Leftrightarrow & t_1 = t_2 & & (\phi \Rightarrow^* \psi) & \Leftrightarrow & (\phi \Rightarrow \psi) & & \neg^*\phi & \Leftrightarrow & \neg\phi
\end{array}$$

(2) Verificar que en todas las equivalencias anteriores, se puede remplazar la conectiva $\Leftrightarrow$ por su versión estrellada $\Leftrightarrow^*$.

(3) Concluir que las construcciones estrelladas no sirven para nada.

Razonamiento por inducción sobre (el tamaño de) la derivación Dada una derivación d en un sistema de deducción cualquiera, se llama el *tamaño* de d y se escribe $|d|$ el número de pasos de deducción en d (es decir: el número de «rayas de inferencia» en el árbol correspondiente). La herramienta fundamental para establecer una (meta)propiedad $\Phi(d)$ para todas las derivaciones d (en un sistema de deducción cualquiera) es el *razonamiento por inducción sobre (el tamaño de) la derivación*, que tiene la siguiente forma:

> Si para toda derivación d:
> si $\Phi(d')$ para toda derivación d' tal que $|d'| < |d|$, (Hipótesis de inducción)
> entonces $\Phi(d)$; (Tesis de inducción)
> entonces para toda derivación d, tenemos que $\Phi(d)$. (Conclusión)

En la práctica, para demostrar que la hipótesis de inducción implica la tesis de inducción, se necesita distinguir los (muchos) casos en función de la última regla aplicada en la derivación d, con el fin de explicitar (para cada regla) las subderivaciones de d sobre las cuales se podrá aplicar la hipótesis de inducción.

Ejercicio 5 (Reglas admisibles en el sistema NK)**.**

(1) Demostrar que para toda derivación $d : (\Gamma \vdash \phi)$, para toda variable x y para todo término u, existe una derivación $d' : (\Gamma[x := u] \vdash \phi[x := u])$ de mismo tamaño $|d'| = |d|$.

(2) Deducir que la siguiente regla es admisible en el sistema NK:

$$\text{Sustitución:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\overline{\Gamma[x := u] \vdash \phi[x := u]}}$$

Dados dos contextos Γ y Γ', se escribe $\Gamma \subseteq \Gamma'$ cuando toda fórmula que ocurre en Γ también ocurre en Γ' (sin tener en cuenta ni el orden, ni el número de ocurrencias en Γ y Γ').

(3) Demostrar que para toda derivación $d : (\Gamma \vdash \phi)$ y para todo contexto Γ' tal que $\Gamma \subseteq \Gamma'$, existe una derivación $d' : (\Gamma' \vdash \phi)$ de mismo tamaño $|d'| = |d|$.

(4) Deducir que la siguiente regla es admisible en el sistema NK:

$$\text{Debilitamiento generalizado:} \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi}{\overline{\Gamma' \vdash \phi}} \ (\text{si } \Gamma \subseteq \Gamma')$$

(5) Deducir de (4) que las reglas de *permutación*, de *debilitamiento*, de *contracción* y del *ex falso quod libet* (véase p. 2) son admisibles en el sistema NK.

Se define la *lógica intuicionista* a través del sistema NJ («deducción natural intuicionista») que se obtiene a partir del sistema NK («deducción natural clásica») remplazando la regla del absurdo (eliminación de $\bot$) por la regla del *ex falso quod libet* (véase p. 2).

(6) Demostrar que la lógica intuicionista está incluida en la lógica clásica.